

Qué contraste de hipótesis usar — Resolución detallada

Elegir el contraste, plantear las hipótesis y decidir paso a paso

Grados de Psicología, Economía, Ciencias de la Salud e Ingeniería

1. Dos ejemplos para empezar

Ejemplo 1: ¿llena bien la máquina?

Una máquina de café debe servir 250 ml por taza. Medimos $n = 16$ tazas y obtenemos una media $\bar{x} = 246$ ml y una desviación típica $s = 8$ ml. ¿Hay evidencia, al nivel $\alpha = 0,05$, de que la máquina no sirve 250 ml de media?

Paso 1. Hipótesis. Las hipótesis hablan de la media de *todas* las tazas, μ , no de la media de nuestras 16:

$$H_0 : \mu = 250 \quad \text{frente a} \quad H_1 : \mu \neq 250.$$

H_1 es «distinto» porque nos preocupa que sirva de más o de menos: contraste *bilateral*.

Paso 2. Estadístico. Es una media, no conocemos la desviación de la población (σ) y la muestra es pequeña: usamos la t de Student con $n - 1 = 15$ grados de libertad (suponemos que el volumen servido es aproximadamente normal):

$$t = \frac{\bar{x} - \mu_0}{s/\sqrt{n}}.$$

Paso 3. Valor del estadístico.

$$t = \frac{246 - 250}{8/\sqrt{16}} = \frac{-4}{2} = -2,00.$$

Paso 4. Región crítica. Bilateral con $\alpha = 0,05$: dejamos 0,025 en cada cola. En la tabla, $t_{15;0,025} = 2,131$. Rechazamos H_0 si $|t| > 2,131$. El p-valor es $P(|T_{15}| \geq 2) = 0,064$.

Paso 5. Decisión. $|-2| = 2 < 2,131$ (o bien $p = 0,064 > 0,05$).

No se rechaza H_0 . Con estas 16 tazas no hay evidencia suficiente, al 5 %, de que la máquina sirva una media distinta de 250 ml.

Fíjate en la frase: no decimos «la máquina sirve 250 ml». Decimos que los datos no bastan para afirmar lo contrario.

Ejemplo 2: ¿mejora el fármaco?

A 100 pacientes se les da un fármaco o un placebo y se anota si mejoran:

	Mejora	No mejora	Total
Fármaco	35	15	50
Placebo	25	25	50
Total	60	40	100

¿Depende la mejora del tratamiento? Usa $\alpha = 0,05$.

Paso 1. Hipótesis. Dos variables cualitativas (tratamiento y mejora). La pregunta es si están relacionadas:

$$H_0 : \text{tratamiento y mejora son independientes} \quad H_1 : \text{no lo son.}$$

Paso 2. Frecuencias esperadas. Si H_0 fuera cierta, cada casilla tendría $E = \frac{\text{total de fila} \times \text{total de columna}}{n}$:

$$E_{\text{Fármaco, Mejora}} = \frac{50 \cdot 60}{100} = 30, \quad E_{\text{Fármaco, No}} = \frac{50 \cdot 40}{100} = 20,$$

y lo mismo para el placebo: 30 y 20. Todas son mayores que 5.

Paso 3. Estadístico. $\chi^2 = \sum \frac{(O - E)^2}{E}$, con $(f - 1)(c - 1) = (2 - 1)(2 - 1) = 1$ grado de libertad:

$$\begin{aligned} \chi^2 &= \frac{(35 - 30)^2}{30} + \frac{(15 - 20)^2}{20} + \frac{(25 - 30)^2}{30} + \frac{(25 - 20)^2}{20} \\ &= 0,833 + 1,250 + 0,833 + 1,250 = 4,17. \end{aligned}$$

Paso 4. Región crítica. La χ^2 solo rechaza por la derecha (diferencias grandes entre lo observado y lo esperado). $\chi^2_{1;0,05} = 3,841$. El p-valor es $P(\chi^2_1 \geq 4,17) = 0,041$.

Paso 5. Decisión. $4,17 > 3,841$ (o $p = 0,041 < 0,05$).

Se rechaza H_0 . Al 5 %, la mejora depende del tratamiento: con el fármaco mejora el 70 % y con el placebo el 50 %.

Todos los contrastes siguen estos cinco pasos. Lo único que cambia es el estadístico, y elegirlo es la parte difícil. Para eso está la receta.

2. El método, resumido

Elegir el contraste. Pregúntate en este orden:

1. ¿Qué tipo de variable?

- *Cualitativa* (categorías):
 - una proporción frente a un valor: z de una proporción;
 - dos proporciones de dos grupos: z de dos proporciones;
 - reparto en varias categorías frente a un modelo: χ^2 de bondad de ajuste;
 - dos variables cualitativas, ¿relacionadas?: χ^2 de independencia.
- *Cuantitativa* (medidas): sigue al punto 2.

2. ¿Cuántos grupos?

- *Uno*, frente a un valor: si se conoce σ , z ; si no, t con $n - 1$ g.l.
- *Dos*: ¿son los mismos individuos medidos dos veces (o por parejas)?
 - sí, *emparejadas*: t sobre las diferencias, $n - 1$ g.l.;
 - no, *independientes*: t con varianza combinada, $n_1 + n_2 - 2$ g.l. (Welch si las varianzas difieren mucho).
- *Tres o más*, independientes: ANOVA de un factor (F).

3. ¿Normalidad? Las t y la F piden datos aproximadamente normales, o muestras grandes ($n \geq 30$ por grupo). Si no, las alternativas no paramétricas: una muestra o emparejadas: *Wilcoxon*; dos independientes: *Mann-Whitney*; tres o más: *Kruskal-Wallis*.

Después, siempre los mismos pasos: **1.** hipótesis sobre el parámetro; **2.** estadístico; **3.** su valor; **4.** región crítica o p-valor; **5.** decisión y conclusión en palabras del problema.

3. Las ideas comunes

3.1. Hipótesis

H_0 (hipótesis nula) es la afirmación «sin efecto»: la media vale lo de siempre, no hay diferencia, las variables son independientes. Lleva siempre el igual. H_1 (alternativa) es lo que queremos demostrar. Puede ser:

- *bilateral*, $H_1 : \mu \neq \mu_0$: interesa una diferencia en cualquier sentido;
- *unilateral*, $H_1 : \mu > \mu_0$ o $H_1 : \mu < \mu_0$: el enunciado señala un sentido («ha aumentado», «es menor que», «mejora»).

En un bilateral el nivel α se reparte entre las dos colas; en un unilateral va entero a una.

Las hipótesis se escriben sobre el *parámetro* de la población (μ , p), nunca sobre el estadístico de la muestra. « $H_0 : \bar{x} = 250$ » no tiene sentido: $\bar{x}$ vale 246 y lo sabemos; lo que no sabemos es μ .

3.2. Los dos errores

	H_0 cierta	H_0 falsa
Rechazamos H_0	Error de tipo I (prob. α)	Acierto (potencia $1 - \beta$)
No rechazamos H_0	Acierto	Error de tipo II (prob. β)

α lo fijamos nosotros (casi siempre 0,05). β depende de cuánto se aleje la realidad de H_0 y del tamaño de la muestra: con más datos, menos β .

«No rechazar» no es «aceptar». Si no rechazamos, puede ser que H_0 sea cierta o que la muestra sea pequeña para ver la diferencia (error de tipo II). La conclusión correcta es «no hay evidencia suficiente de...».

3.3. El p-valor

El p-valor es la probabilidad de obtener un estadístico tan extremo como el observado, o más, *suponiendo que H_0 es cierta*. Si $p < \alpha$, rechazamos H_0 . Decidir con el p-valor o con la región crítica da siempre lo mismo.

El p-valor *no* es la probabilidad de que H_0 sea cierta. Un $p = 0,04$ dice: «si H_0 fuera cierta, un resultado así o más extremo saldría un 4 % de las veces». No dice « H_0 tiene un 4 % de probabilidad».

4. Los contrastes, uno a uno

4.1. Una media: z y t

$$\sigma \text{ conocida: } z = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1), \quad \sigma \text{ desconocida: } t = \frac{\bar{x} - \mu_0}{s/\sqrt{n}} \sim t_{n-1}.$$

Condiciones: población normal, o $n \geq 30$. En la práctica σ casi nunca se conoce; la z aparece cuando el enunciado da la desviación «de la población» o «del proceso». El ejemplo 1 es una t . Veamos una z .

Ejemplo. Un test de razonamiento tiene $\sigma = 12$ en la población. Una academia dice que sus alumnos superan la media nacional de 100. Con $n = 36$ alumnos, $\bar{x} = 103$.

Paso 1. $H_0 : \mu = 100$, $H_1 : \mu > 100$ (unilateral: «superan»).

Paso 2. $z = \frac{103 - 100}{12/6} = 1,50$.

Paso 3. $z_{0,05} = 1,645$; p-valor $P(Z \geq 1,5) = 0,067$.

$1,50 < 1,645$: no se rechaza H_0 . No hay evidencia suficiente, al 5 %, de que los alumnos de la academia superen la media nacional.

4.2. Dos medias independientes

Dos grupos distintos de individuos. Con varianzas parecidas se combinan:

$$s_p^2 = \frac{(n_1 - 1)s_1^2 + (n_2 - 1)s_2^2}{n_1 + n_2 - 2}, \quad t = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{s_p \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}} \sim t_{n_1+n_2-2}.$$

Condiciones: normalidad en cada grupo (o muestras grandes) y varianzas similares. Si una desviación es más del doble que la otra, se usa la *t de Welch*, que no combina las varianzas y ajusta los grados de libertad (lo hace cualquier programa).

Ejemplo. Puntuación de ansiedad con dos terapias. Terapia A: $n_1 = 10$, $\bar{x}_1 = 24,5$, $s_1 = 4,2$. Terapia B: $n_2 = 12$, $\bar{x}_2 = 20,8$, $s_2 = 3,9$. ¿Difieren las medias? ($\alpha = 0,05$.)

Paso 1. $H_0 : \mu_1 = \mu_2$, $H_1 : \mu_1 \neq \mu_2$.

Paso 2.

$$s_p^2 = \frac{9 \cdot 4,2^2 + 11 \cdot 3,9^2}{20} = \frac{158,76 + 167,31}{20} = 16,30, \quad s_p = 4,038$$

$$t = \frac{24,5 - 20,8}{4,038 \sqrt{\frac{1}{10} + \frac{1}{12}}} = \frac{3,7}{1,729} = 2,14.$$

Paso 3. $t_{20; 0,025} = 2,086$; p-valor 0,045.

$2,14 > 2,086$: se rechaza H_0 . Al 5 %, la ansiedad media difiere entre terapias. (Con Welch: $t = 2,13$, $p = 0,047$; la misma conclusión.)

4.3. Dos medias emparejadas

Los mismos individuos medidos dos veces (antes y después), o parejas naturales (gemelos, ojo izquierdo y derecho). Se calcula la diferencia d de cada individuo y se hace una t de una media sobre las d :

$$t = \frac{\bar{d}}{s_d/\sqrt{n}} \sim t_{n-1}, \quad H_0 : \mu_d = 0.$$

Ejemplo. Pulsaciones de 8 personas antes y después de un curso de relajación:

Antes	72	68	80	75	66	70	78	74
Después	68	66	75	74	63	69	72	70
d	4	2	5	1	3	1	6	4

Paso 1. $H_0 : \mu_d = 0$, $H_1 : \mu_d \neq 0$.

Paso 2. $\bar{d} = 26/8 = 3,25$, $s_d = 1,832$.

$$t = \frac{3,25}{1,832/\sqrt{8}} = \frac{3,25}{0,648} = 5,02.$$

Paso 3. $t_{7; 0,025} = 2,365$; p-valor 0,0015.

$5,02 > 2,365$: se rechaza H_0 . Las pulsaciones cambian tras el curso (bajan 3,25 de media).

Tratar datos emparejados como independientes es un error grave. Con estos mismos datos, la t de dos muestras independientes da $t = 1,46$ y $p = 0,17$: *no* se rechazaría. La variación entre personas (unas tienen el pulso alto, otras bajo) tapa el efecto; al restar dentro de cada persona, esa variación desaparece.

4.4. Una proporción

Con $\hat{p} = x/n$ la proporción de la muestra:

$$z = \frac{\hat{p} - p_0}{\sqrt{p_0(1-p_0)/n}} \sim N(0,1) \quad \text{si } np_0 \geq 5 \text{ y } n(1-p_0) \geq 5.$$

En el denominador va p_0 , el valor de H_0 , no $\hat{p}$.

Ejemplo. De 200 encuestados, 116 prefieren el producto nuevo. ¿Hay una preferencia distinta del 50 %?

Paso 1. $H_0 : p = 0,5$, $H_1 : p \neq 0,5$. $\hat{p} = 116/200 = 0,58$.

Paso 2.

$$z = \frac{0,58 - 0,5}{\sqrt{0,5 \cdot 0,5/200}} = \frac{0,08}{0,0354} = 2,26.$$

Paso 3. $z_{0,025} = 1,96$; p-valor 0,024.

$2,26 > 1,96$: se rechaza H_0 . Al 5 %, la preferencia por el producto nuevo es distinta del 50 % (mayor).

4.5. Dos proporciones

Bajo $H_0 : p_1 = p_2$ se estima la proporción común $\hat{p} = \frac{x_1 + x_2}{n_1 + n_2}$:

$$z = \frac{\hat{p}_1 - \hat{p}_2}{\sqrt{\hat{p}(1-\hat{p})\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)}}.$$

Ejemplo. Abandonan un tratamiento 45 de 150 pacientes en el hospital A y 30 de 150 en el B. ¿Difieren las tasas de abandono?

Paso 1. $H_0 : p_1 = p_2$, $H_1 : p_1 \neq p_2$. $\hat{p}_1 = 0,30$, $\hat{p}_2 = 0,20$, $\hat{p} = 75/300 = 0,25$.

Paso 2.

$$z = \frac{0,30 - 0,20}{\sqrt{0,25 \cdot 0,75 \cdot \frac{2}{150}}} = \frac{0,10}{0,05} = 2,00.$$

Paso 3. $z_{0,025} = 1,96$; p-valor 0,046.

$2,00 > 1,96$: se rechaza H_0 , por poco. Al 5 %, las tasas de abandono difieren.

4.6. χ^2 de bondad de ajuste

Una variable con k categorías y un modelo que dice qué proporción p_i espera en cada una. Esperadas $E_i = np_i$ y

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^k \frac{(O_i - E_i)^2}{E_i} \sim \chi_{k-1}^2.$$

Ejemplo. Un dado se lanza 120 veces: salen 15, 22, 18, 25, 14, 26 veces las caras 1 a 6. ¿Está equilibrado?

Paso 1. H_0 : cada cara tiene probabilidad $1/6$. $E_i = 120/6 = 20$.

Paso 2.

$$\chi^2 = \frac{25 + 4 + 4 + 25 + 36 + 36}{20} = \frac{130}{20} = 6,50.$$

Paso 3. $k - 1 = 5$ g.l.; $\chi_{5;0,05}^2 = 11,07$; p-valor 0,26.

6,50 < 11,07: no se rechaza H_0 . No hay evidencia de que el dado esté trucado.

4.7. χ^2 de independencia

Es el ejemplo 2: tabla de f filas y c columnas, $E = \frac{\text{fila} \cdot \text{columna}}{n}$ y $(f-1)(c-1)$ grados de libertad.

Las dos χ^2 exigen que todas las frecuencias *esperadas* sean al menos 5 (las observadas pueden ser pequeñas). Si alguna no llega, se agrupan categorías vecinas que tengan sentido juntas, y se recalculan esperadas y grados de libertad.

4.8. Tres o más medias: ANOVA de un factor

Para comparar $k \geq 3$ grupos independientes no se hacen muchas t (se acumula el error de tipo I). Se compara la variación *entre* grupos con la variación *dentro* de los grupos. Con N datos en total y $\bar{x}$ la media global:

$$SC_{\text{entre}} = \sum_j n_j (\bar{x}_j - \bar{x})^2, \quad SC_{\text{dentro}} = \sum_j \sum_i (x_{ij} - \bar{x}_j)^2,$$

$$F = \frac{SC_{\text{entre}}/(k-1)}{SC_{\text{dentro}}/(N-k)} \sim F_{k-1, N-k}.$$

$H_0 : \mu_1 = \dots = \mu_k$; H_1 : alguna media es distinta. Se rechaza por la derecha. Condiciones: normalidad en cada grupo y varianzas parecidas.

Ejemplo. Tres métodos de aprendizaje, cuatro alumnos cada uno:

Método 1	5	7	6	6	$\bar{x}_1 = 6$
Método 2	8	9	7	8	$\bar{x}_2 = 8$
Método 3	10	9	11	10	$\bar{x}_3 = 10$

Paso 1. Media global $\bar{x} = 8$.

$$SC_{\text{entre}} = 4[(6-8)^2 + (8-8)^2 + (10-8)^2] = 32$$

$$SC_{\text{dentro}} = (1+1+0+0) + (0+1+1+0) + (0+1+1+0) = 6$$

$$F = \frac{32/2}{6/9} = \frac{16}{0,667} = 24,0.$$

Paso 2. $F_{2,9;0,05} = 4,26$; p-valor 0,0002.

$24 > 4,26$: se rechaza H_0 . Al menos un método da una media distinta.

El ANOVA no dice cuál; eso lo hacen las comparaciones posteriores (Tukey, Bonferroni), que quedan fuera de esta hoja.

5. Ejercicios

En todos, $\alpha = 0,05$ salvo que se diga otra cosa.

Niveles de dificultad

 Te dicen qué contraste usar: aplicar los pasos.

 El contraste se deduce del enunciado, pero hay que calcular la media, la desviación o las esperadas.

 Elegir el contraste a partir de un enunciado verbal.

 Elegir el contraste y además sortear una trampa: agrupar categorías o no tratar como independiente lo emparejado.

-  **1. (*t* de una media)** Una empresa afirma que sus empleados trabajan 50 horas semanales de media. Una muestra de 25 empleados da $\bar{x} = 52,3$ h y $s = 4,5$ h. Con una *t* bilateral, ¿es compatible con la afirmación?

Solución.

Paso 1. Hipótesis. $H_0 : \mu = 50$, $H_1 : \mu \neq 50$.

Paso 2. Estadístico.

$$t = \frac{52,3 - 50}{4,5/\sqrt{25}} = \frac{2,3}{0,9} = 2,56.$$

Paso 3. Región crítica. $t_{24;0,025} = 2,064$; p-valor 0,017.

$2,56 > 2,064$: se rechaza H_0 . Al 5 %, hay evidencia de que la media de horas semanales no es 50: los datos apuntan a que se trabaja más.

-  **2. (*z* de una proporción)** Históricamente el 15 % de las piezas sale defectuosa. Tras cambiar un proceso, 48 de 400 piezas son defectuosas. Con un contraste unilateral de una proporción, ¿ha bajado la tasa?

Solución.

Paso 1. Hipótesis. $H_0 : p = 0,15$, $H_1 : p < 0,15$. $\hat{p} = 48/400 = 0,12$. Condiciones: $400 \cdot 0,15 = 60 \geq 5$ y $400 \cdot 0,85 = 340 \geq 5$.

Paso 2. Estadístico.

$$z = \frac{0,12 - 0,15}{\sqrt{0,15 \cdot 0,85/400}} = \frac{-0,03}{0,01785} = -1,68.$$

Paso 3. Región crítica. Cola izquierda: rechazamos si $z < -1,645$. P-valor $P(Z \leq -1,68) = 0,046$.

$-1,68 < -1,645$: se rechaza H_0 . Al 5 %, la tasa de defectos ha bajado.

3. (emparejadas, con los datos) Seis estudiantes hacen un test de memoria antes y después de dormir bien:

Después	12	15	9	14	11	13
Antes	10	11	9	10	8	12

¿Mejora la puntuación tras dormir bien?

Solución.

Paso 1. Elección. Los mismos estudiantes, dos veces: emparejadas. «Mejora» indica unilateral. Con $d = \text{después} - \text{antes}$: $H_0 : \mu_d = 0$, $H_1 : \mu_d > 0$. Con solo 6 parejas, suponemos que las diferencias son aproximadamente normales.

Paso 2. Diferencias. $d = 2, 4, 0, 4, 3, 1$.

$$\bar{d} = \frac{14}{6} = 2,333$$

$$s_d^2 = \frac{(2 - 2,333)^2 + \dots + (1 - 2,333)^2}{5} = \frac{13,333}{5} = 2,667, \quad s_d = 1,633.$$

Paso 3. Estadístico.

$$t = \frac{2,333}{1,633/\sqrt{6}} = \frac{2,333}{0,667} = 3,50.$$

Paso 4. Región crítica. $t_{5;0,05} = 2,015$; p-valor 0,009.

$3,50 > 2,015$: se rechaza H_0 . Al 5 %, la puntuación mejora tras dormir bien.

4. (bondad de ajuste) Según el último censo, en una ciudad el 45 % de la población usa el coche, el 35 % el transporte público y el 20 % va a pie. En una encuesta a 100 personas salen 50, 30 y 20. ¿Ha cambiado el reparto?

Solución.

Paso 1. Hipótesis. H_0 : el reparto es 0,45, 0,35, 0,20. H_1 : no lo es.

Paso 2. Esperadas. $E = 100 \cdot p_i$: 45, 35 y 20. Todas mayores que 5.

Paso 3. Estadístico.

$$\chi^2 = \frac{(50 - 45)^2}{45} + \frac{(30 - 35)^2}{35} + \frac{(20 - 20)^2}{20} = 0,556 + 0,714 + 0 = 1,27.$$

Paso 4. Región crítica. $k - 1 = 2$ g.l.; $\chi^2_{2;0,05} = 5,991$; p-valor 0,53.

1,27 < 5,991: no se rechaza H_0 . No hay evidencia de que el reparto haya cambiado.

5. (dos medias independientes) Un grupo de 15 personas sigue una dieta y otro de 15 no. Al cabo de un mes, el peso medio es 68,2 kg ($s = 6,1$) sin dieta y 63,5 kg ($s = 5,8$) con dieta. Suponiendo normalidad y varianzas iguales, ¿pesan menos los de la dieta?

Solución.

Paso 1. Hipótesis. Grupo 1 sin dieta, grupo 2 con dieta. $H_0 : \mu_1 = \mu_2$, $H_1 : \mu_1 > \mu_2$.

Paso 2. Varianza combinada.

$$s_p^2 = \frac{14 \cdot 6,1^2 + 14 \cdot 5,8^2}{28} = \frac{37,21 + 33,64}{2} = 35,43, \quad s_p = 5,952.$$

Paso 3. Estadístico.

$$t = \frac{68,2 - 63,5}{5,952 \sqrt{\frac{2}{15}}} = \frac{4,7}{2,173} = 2,16.$$

Paso 4. Región crítica. $t_{28;0,05} = 1,701$; p-valor 0,020.

2,16 > 1,701: se rechaza H_0 . Al 5 %, quienes siguen la dieta pesan menos de media.

6. (z de una media, σ conocida) Una máquina corta varillas cuya longitud tiene desviación típica $\sigma = 10$ mm, conocida por el fabricante, y es normal. Se miden 25 varillas y la media es $\bar{x} = 54$ mm. Con un contraste z de una media, unilateral, ¿es la longitud media mayor que 50 mm?

Solución.

Paso 1. Hipótesis. $H_0 : \mu = 50$, $H_1 : \mu > 50$.

Paso 2. Estadístico.

$$z = \frac{54 - 50}{10/\sqrt{25}} = \frac{4}{2} = 2,00.$$

Paso 3. Región crítica. Cola derecha: rechazamos si $z > 1,645$. P-valor $P(Z \geq 2) = 0,023$.

2,00 > 1,645: se rechaza H_0 . Al 5 %, la longitud media es mayor que 50 mm.

Comprobación: el p-valor, $0,023 < 0,05$, lleva a la misma decisión.

7. (*z de dos proporciones*) En una escuela, 40 de 100 alumnos del turno de mañana hacen deporte, frente a 25 de 100 del turno de tarde. Con un contraste *z* de dos proporciones, bilateral, ¿difiere la proporción entre turnos?

Solución.

Paso 1. Hipótesis. $H_0 : p_1 = p_2$, $H_1 : p_1 \neq p_2$. $\hat{p}_1 = 0,40$, $\hat{p}_2 = 0,25$, $\hat{p} = 65/200 = 0,325$.

Paso 2. Estadístico.

$$z = \frac{0,40 - 0,25}{\sqrt{0,325 \cdot 0,675 \cdot \frac{2}{100}}} = \frac{0,15}{0,0662} = 2,26.$$

Paso 3. Región crítica. $|z| > 1,96$; p-valor 0,024.

2,26 > 1,96: se rechaza H_0 . Al 5 %, la proporción que hace deporte difiere entre turnos (es mayor por la mañana).

Comprobación: el p-valor, $0,024 < 0,05$, lleva a la misma decisión.

8. (*ANOVA de un factor*) Se prueban tres fertilizantes en tres parcelas cada uno; la cosecha (en kg) es:

Fertilizante A	2	3	4
Fertilizante B	4	5	6
Fertilizante C	6	7	8

Con un ANOVA de un factor (supón normalidad y varianzas iguales), ¿depende la cosecha media del fertilizante?

Solución.

Paso 1. Hipótesis. $H_0 : \mu_A = \mu_B = \mu_C$; H_1 : alguna media difiere.

Paso 2. Medias. $\bar{x}_A = 3$, $\bar{x}_B = 5$, $\bar{x}_C = 7$; global $\bar{x} = 45/9 = 5$.

Paso 3. Sumas de cuadrados.

$$SC_{\text{entre}} = 3[(3 - 5)^2 + (5 - 5)^2 + (7 - 5)^2] = 24$$

$$SC_{\text{dentro}} = (1 + 0 + 1) + (1 + 0 + 1) + (1 + 0 + 1) = 6$$

Paso 4. Estadístico. $k = 3$, $N = 9$:

$$F = \frac{24/2}{6/6} = \frac{12}{1} = 12,0.$$

Paso 5. Región crítica. $F_{2,6; 0,05} = 5,143$; p-valor 0,008.

12 > 5,143: se rechaza H_0 . Al 5 %, la cosecha media depende del fertilizante.

Comprobación: $SC_{\text{total}} = \sum (x - 5)^2 = 9 + 4 + 1 + 1 + 0 + 1 + 1 + 4 + 9 = 30 = 24 + 6$.

9. (elegir: dos campañas) Una ONG envía dos cartas distintas a dos grupos de 120 personas elegidas al azar. Con la carta A donan 36 personas; con la B, 54. ¿Funciona igual de bien una carta que la otra? Elige el contraste y resuélvelo.

Solución.

Paso 1. Elección. La variable es «dona sí/no»: cualitativa. Dos grupos distintos: z de dos proporciones. «Igual de bien» pide bilateral.

Paso 2. Hipótesis. $H_0 : p_A = p_B$, $H_1 : p_A \neq p_B$. $\hat{p}_A = 0,30$, $\hat{p}_B = 0,45$, $\hat{p} = 90/240 = 0,375$.

Paso 3. Estadístico.

$$z = \frac{0,30 - 0,45}{\sqrt{0,375 \cdot 0,625 \cdot \frac{2}{120}}} = \frac{-0,15}{0,0625} = -2,40.$$

Paso 4. Región crítica. $|z| > 1,96$; p-valor 0,016.

$|-2,40| > 1,96$: se rechaza H_0 . Las cartas no funcionan igual: la B consigue más donantes.

10. (elegir: la máquina de envasado) Una envasadora llena paquetes de 500 g. El fabricante garantiza que la desviación típica del proceso es de 4 g y que los pesos son normales. Se pesan 25 paquetes y la media es 498,2 g. ¿Se ha desajustado la máquina? Elige el contraste y resuélvelo.

Solución.

Paso 1. Elección. Variable cuantitativa, un grupo, frente a un valor. La desviación es la del proceso, es decir, $\sigma = 4$ conocida: z de una media. «Desajustado» puede ser por arriba o por abajo: bilateral.

Paso 2. Hipótesis. $H_0 : \mu = 500$, $H_1 : \mu \neq 500$.

Paso 3. Estadístico.

$$z = \frac{498,2 - 500}{4/\sqrt{25}} = \frac{-1,8}{0,8} = -2,25.$$

Paso 4. Región crítica. $|z| > 1,96$; p-valor 0,024.

$|-2,25| > 1,96$: se rechaza H_0 . Al 5 %, la máquina se ha desajustado: llena por debajo de 500 g.

11. (elegir: tres turnos) Se mide el número de errores por hora de 15 operarios, cinco de cada turno:

Mañana	6	8	7	5	9
Tarde	9	11	10	12	8
Noche	7	9	8	10	6

¿Depende el número medio de errores del turno? Supón normalidad y varianzas iguales.

Solución.

Paso 1. Elección. Variable cuantitativa, tres grupos independientes: ANOVA de un factor. $H_0: \mu_M = \mu_T = \mu_N$; H_1 : alguna media difiere.

Paso 2. Medias. $\bar{x}_M = 7$, $\bar{x}_T = 10$, $\bar{x}_N = 8$; global $\bar{x} = 125/15 = 8,333$.

Paso 3. Sumas de cuadrados.

$$SC_{\text{entre}} = 5[(7 - 8,333)^2 + (10 - 8,333)^2 + (8 - 8,333)^2] = 23,33$$

$$SC_{\text{dentro}} = 10 + 10 + 10 = 30$$

(en cada turno las desviaciones a su media son $-1, 1, 0, -2, 2$ o una permutación: suman 10 al cuadrado).

Paso 4. Estadístico.

$$F = \frac{23,33/2}{30/12} = \frac{11,67}{2,5} = 4,67.$$

Paso 5. Región crítica. $F_{2,12;0,05} = 3,885$; p-valor 0,032.

4,67 > 3,885: se rechaza H_0 . Al 5 %, el número medio de errores depende del turno.

12. (elegir: pocas observaciones en una casilla) Se pregunta a 70 personas su nivel de estudios (básicos, medios, superiores, doctorado) y si leen prensa a diario:

	Básicos	Medios	Superiores	Doctorado	Total
Lee	18	12	5	3	38
No lee	10	14	6	2	32
Total	28	26	11	5	70

¿Está relacionado leer prensa con el nivel de estudios? Elige el contraste, comprueba sus condiciones y resuélvelo.

Solución.

Paso 1. Elección. Dos variables cualitativas: χ^2 de independencia. H_0 : leer prensa y nivel de estudios son independientes.

Paso 2. Condiciones. En la columna «Doctorado»:

$$E = \frac{38 \cdot 5}{70} = 2,71, \quad E = \frac{32 \cdot 5}{70} = 2,29.$$

Son menores que 5. Agrupamos «Superiores» y «Doctorado» (categorías vecinas): 8 y 8, total 16.

Paso 3. Esperadas de la tabla agrupada.

$$E_{\text{Lee, Bás.}} = \frac{38 \cdot 28}{70} = 15,20, \quad E_{\text{Lee, Med.}} = \frac{38 \cdot 26}{70} = 14,11, \quad E_{\text{Lee, Sup.}} = \frac{38 \cdot 16}{70} = 8,69$$

$$E_{\text{No, Bás.}} = \frac{32 \cdot 28}{70} = 12,80, \quad E_{\text{No, Med.}} = \frac{32 \cdot 26}{70} = 11,89, \quad E_{\text{No, Sup.}} = \frac{32 \cdot 16}{70} = 7,31$$

Ahora todas superan 5.

Paso 4. Estadístico.

$$\begin{aligned}\chi^2 &= \frac{(18 - 15,20)^2}{15,20} + \frac{(12 - 14,11)^2}{14,11} + \frac{(8 - 8,69)^2}{8,69} \\ &\quad + \frac{(10 - 12,80)^2}{12,80} + \frac{(14 - 11,89)^2}{11,89} + \frac{(8 - 7,31)^2}{7,31} \\ &= 0,516 + 0,317 + 0,054 + 0,613 + 0,376 + 0,064 = 1,94.\end{aligned}$$

Paso 5. Región crítica. Tras agrupar, $(2-1)(3-1) = 2$ g.l. (no 3): $\chi^2_{2;0,05} = 5,991$; p-valor 0,38.

1,94 < 5,991: no se rechaza H_0 . No hay evidencia de relación entre leer prensa y el nivel de estudios.

13. (elegir: el error del compañero) Se mide la tensión sistólica de 10 pacientes antes y después de un tratamiento:

Antes	140	152	138	145	160	148	155	142	150	147
Después	135	147	136	140	152	146	149	141	144	143

Un compañero hace una t de dos muestras independientes, obtiene $p = 0,13$ y concluye: «el tratamiento no hace nada; hay un 13 % de probabilidad de que H_0 sea cierta». Elige el contraste correcto, resuélvelo (bilateral) y señala los errores de su conclusión.

Solución.

Paso 1. Elección. Son los mismos 10 pacientes medidos dos veces: muestras emparejadas. La t de independientes es el contraste equivocado.

Paso 2. Hipótesis. Con $d = \text{antes} - \text{después}$: $H_0 : \mu_d = 0$, $H_1 : \mu_d \neq 0$.

Paso 3. Diferencias. $d = 5, 5, 2, 5, 8, 2, 6, 1, 6, 4$.

$$\begin{aligned}\bar{d} &= \frac{44}{10} = 4,4, & s_d &= 2,171 \\ t &= \frac{4,4}{2,171/\sqrt{10}} = \frac{4,4}{0,686} = 6,41.\end{aligned}$$

Paso 4. Región crítica. $t_{9;0,025} = 2,262$; p-valor 0,0001.

6,41 > 2,262: se rechaza H_0 . Al 5 %, el tratamiento cambia la tensión: la baja 4,4 mmHg de media.

Paso 5. Los errores del compañero.

- Usó independientes con datos emparejados. La variación entre pacientes ($s \approx 6,8$ y $5,5$) tapa la diferencia, que es muy regular dentro de cada paciente ($s_d = 2,2$).
- Aun con su $p = 0,13$, «no rechazar» no permite decir «no hace nada»: solo que no hay evidencia suficiente.
- El p-valor no es la probabilidad de que H_0 sea cierta: es la probabilidad de un resultado así o más extremo si H_0 fuera cierta.