

Diagonalización paso a paso — Resolución detallada

Autovalores, autovectores y cuándo una matriz es diagonalizable

Grados de Ciencias e Ingeniería

1. Dos ejemplos para empezar

Ejemplo 1: una matriz 2×2

Queremos escribir

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

como $A = PDP^{-1}$, con D diagonal. Buscamos vectores $v \neq 0$ que A solo estira: $Av = \lambda v$. El número λ es un *autovalor* y v , un *autovector*.

Paso 1. Polinomio característico. $Av = \lambda v$ con $v \neq 0$ pide que $A - \lambda I$ no sea invertible, es decir, $\det(A - \lambda I) = 0$:

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda I) &= \begin{vmatrix} 4 - \lambda & 1 \\ 2 & 3 - \lambda \end{vmatrix} = (4 - \lambda)(3 - \lambda) - 2 \\ &= \lambda^2 - 7\lambda + 10. \end{aligned}$$

Paso 2. Sus raíces.

$$\lambda^2 - 7\lambda + 10 = (\lambda - 2)(\lambda - 5) = 0 \implies \lambda = 5, \lambda = 2.$$

Paso 3. Autovectores de $\lambda = 5$. Resolvemos $(A - 5I)v = 0$:

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \implies -x + y = 0.$$

La segunda fila es la primera por -2 : queda una sola ecuación, $y = x$. Tomamos $v_1 = (1, 1)$.

Paso 4. Autovectores de $\lambda = 2$. Resolvemos $(A - 2I)v = 0$:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \implies 2x + y = 0.$$

Así que $y = -2x$. Tomamos $v_2 = (1, -2)$.

Paso 5. P y D . Los autovectores van en columnas de P ; los autovalores, en la diagonal de D , en el mismo orden.

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad A = PDP^{-1}.$$

Paso 6. Comprobamos $AP = PD$. Así no hace falta calcular P^{-1} :

$$AP = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 5 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = PD.$$

Ejemplo 2: una 3×3 con un autovalor doble

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 3 & -5 & 3 \\ 6 & -6 & 4 \end{pmatrix}.$$

Paso 1. Polinomio característico. Antes de desarrollar, sumamos la columna 2 a la columna 1 (el determinante no cambia) y sacamos el factor común $-2 - \lambda$:

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda I) &= \begin{vmatrix} 1 - \lambda & -3 & 3 \\ 3 & -5 - \lambda & 3 \\ 6 & -6 & 4 - \lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 - \lambda & -3 & 3 \\ -2 - \lambda & -5 - \lambda & 3 \\ 0 & -6 & 4 - \lambda \end{vmatrix} \\ &= (-2 - \lambda) \begin{vmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 1 & -5 - \lambda & 3 \\ 0 & -6 & 4 - \lambda \end{vmatrix} = (-2 - \lambda) \begin{vmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 0 & -2 - \lambda & 0 \\ 0 & -6 & 4 - \lambda \end{vmatrix} \\ &= (-2 - \lambda)^2 (4 - \lambda). \end{aligned}$$

En el último paso restamos la fila 1 a la fila 2 y desarrollamos por la primera columna.

Paso 2. Sus raíces. $\lambda = -2$, doble, y $\lambda = 4$, simple.

Paso 3. Autovectores de $\lambda = -2$. Resolvemos $(A + 2I)v = 0$:

$$\begin{pmatrix} 3 & -3 & 3 \\ 3 & -3 & 3 \\ 6 & -6 & 6 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{reducimos}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \implies x - y + z = 0.$$

Una ecuación con tres incógnitas: dos parámetros. Con $y = x + z$:

$$(x, x + z, z) = x(1, 1, 0) + z(-1, 0, 1).$$

Hay *dos* autovectores independientes: $v_1 = (1, 1, 0)$ y $v_2 = (-1, 0, 1)$. Esto es lo que hace que la matriz diagonalice.

Paso 4. Autovectores de $\lambda = 4$. Resolvemos $(A - 4I)v = 0$:

$$\begin{pmatrix} -3 & -3 & 3 \\ 3 & -9 & 3 \\ 6 & -6 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{reducimos}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & -6 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(La fila 3 dividida entre 6 pasa arriba; la fila 1 más 3 veces esa da $(0, -6, 3)$; la fila 2 menos 3 veces esa da $(0, -6, 3)$ otra vez, y se anula.) Entonces $x = y$ y $z = 2y$: $v_3 = (1, 1, 2)$.

Paso 5. P y D .

$$P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Paso 6. Comprobamos. $\det P = 2 \neq 0$, así que las columnas son independientes, y

$$AP = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 4 \\ -2 & 0 & 4 \\ 0 & -2 & 8 \end{pmatrix} = PD.$$

Otra comprobación rápida: la traza de A es $1 - 5 + 4 = 0$ y la suma de los autovalores, $-2 - 2 + 4 = 0$. Todo el tema son estos dos ejemplos: el polinomio característico da los autovalores, cada núcleo $\ker(A - \lambda I)$ da sus autovectores, y la matriz diagonaliza si se juntan tantos autovectores independientes como su tamaño.

2. El método, resumido

Cómo diagonalizar una matriz A de tamaño $n \times n$.

1. **Polinomio característico:** $p(\lambda) = \det(A - \lambda I)$. En 2×2 , $p(\lambda) = \lambda^2 - (\text{tr } A)\lambda + \det A$.
2. **Autovalores:** las raíces de p , cada una con su multiplicidad algebraica m_a .
3. **Autovectores:** para cada λ , resolver $(A - \lambda I)v = 0$. La multiplicidad geométrica es $m_g = \dim \ker(A - \lambda I) = n - \text{rg}(A - \lambda I)$.
4. **¿Diagonaliza?** Sí, si y solo si todas las raíces son reales y $m_g = m_a$ para cada autovalor.
5. **P y D :** autovectores en columnas de P , sus autovalores en la diagonal de D , en el mismo orden.
6. **Comprobar** $AP = PD$, o traza y determinante.

3. Por qué funciona

Si $Av_i = \lambda_i v_i$ para $i = 1, \dots, n$, al poner los v_i en columnas de P :

$$AP = (Av_1 \ \cdots \ Av_n) = (\lambda_1 v_1 \ \cdots \ \lambda_n v_n) = PD.$$

Si además los v_i son independientes, P es invertible y $A = PDP^{-1}$. Diagonalizar es, por tanto, encontrar una base de autovectores.

Dos datos ayudan a comprobar: la traza de A es la suma de los autovalores, y $\det A$ es su producto (contando multiplicidades).

4. Cuándo diagonaliza

4.1. Multiplicidad algebraica y geométrica

Para cada autovalor λ hay dos números:

- la *multiplicidad algebraica* m_a : cuántas veces es raíz de p ;
- la *multiplicidad geométrica* $m_g = \dim \ker(A - \lambda I)$: cuántos autovectores independientes tiene.

Siempre $1 \leq m_g \leq m_a$.

Criterio. A diagonaliza (en $\mathbb{R}$) si y solo si todos sus autovalores son reales y $m_g = m_a$ para cada uno.

Los autovalores simples cumplen siempre $m_g = m_a = 1$. Solo hay que mirar los múltiples.

Si al resolver $(A - \lambda I)v = 0$ solo sale $v = 0$, el autovalor está mal calculado: $A - \lambda I$ tiene que tener determinante cero y el sistema, soluciones no triviales. Vuelve al polinomio característico.

4.2. Autovalores distintos

Si A ($n \times n$) tiene n autovalores reales distintos, diagonaliza.

Es el ejemplo 1: autovectores de autovalores distintos son siempre independientes.

4.3. Un caso que no diagonaliza

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad p(\lambda) = (\lambda - 3)^2.$$

El autovalor $\lambda = 3$ es doble, $m_a = 2$. Pero

$$A - 3I = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \implies y = 0,$$

y solo hay un autovector independiente, $(1, 0)$: $m_g = 1 < 2$. No hay base de autovectores, así que *no diagonaliza*.

Si el polinomio característico tiene raíces complejas, la matriz no diagonaliza en $\mathbb{R}$. Por ejemplo, el giro $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ tiene $p(\lambda) = \lambda^2 + 1$: ningún vector real queda en su propia dirección.

4.4. Matrices simétricas

Toda matriz simétrica real ($A^t = A$) diagonaliza, y además con una base *ortonormal* de autovectores: $A = QDQ^t$ con $Q^{-1} = Q^t$.

Ejemplo. $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$: traza 4 y determinante 3, así que $p(\lambda) = \lambda^2 - 4\lambda + 3 = (\lambda - 3)(\lambda - 1)$.

$$\lambda = 3: \quad A - 3I = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \implies y = x, \quad v_1 = (1, 1)$$

$$\lambda = 1: \quad A - I = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \implies y = -x, \quad v_2 = (1, -1).$$

Los dos son perpendiculares ($1 - 1 = 0$). Dividiendo cada uno por su norma $\sqrt{2}$:

$$Q = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A = QDQ^t.$$

5. Para qué sirve: potencias

Si $A = PDP^{-1}$, en $A^2 = PDP^{-1}PDP^{-1}$ los factores centrales se cancelan, y en general

$$A^n = P D^n P^{-1}, \quad D^n = \begin{pmatrix} \lambda_1^n & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_k^n \end{pmatrix}.$$

Ejemplo. Con la matriz del ejemplo 1, $P^{-1} = \frac{1}{-3} \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, y

$$\begin{aligned} A^n &= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5^n & 0 \\ 0 & 2^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 5^n & 2^n \\ 5^n & -2 \cdot 2^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 \cdot 5^n + 2^n & 5^n - 2^n \\ 2 \cdot 5^n - 2 \cdot 2^n & 5^n + 2 \cdot 2^n \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Para $n = 1$ sale $\frac{1}{3} \begin{pmatrix} 12 & 3 \\ 6 & 9 \end{pmatrix} = A$.

El orden de las columnas de P es libre, pero tiene que ser el mismo que el de los autovalores en D . Si cambias dos columnas de P , cambia también los dos autovalores.

Para diagonalizar basta con P y D , y se comprueba con $AP = PD$. La inversa P^{-1} solo hace falta para calcular A^n (o para escribir $A = PDP^{-1}$ explícitamente).

6. Ejercicios

Niveles de dificultad

- | | | | |
|---|---|--|--|
|  Autovalores distintos: aplicar la receta. |  Autovalor múltiple: comparar multiplicidades, o calcular A^n directo. |  Un parámetro en la matriz, o A^n aplicado a un problema. |  El parámetro cambia los autovalores, o plantear la matriz uno mismo. |
|---|---|--|--|

 **1. (autovalores distintos)** Diagonaliza $A = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 6 & -2 \end{pmatrix}$.

Solución.

Paso 1. Polinomio característico. Traza 3, determinante $-10 + 12 = 2$:

$$p(\lambda) = \lambda^2 - 3\lambda + 2 = (\lambda - 1)(\lambda - 2).$$

Paso 2. $\lambda = 1$.

$$A - I = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 6 & -3 \end{pmatrix} \implies 2x - y = 0, \quad v_1 = (1, 2).$$

Paso 3. $\lambda = 2$.

$$A - 2I = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 6 & -4 \end{pmatrix} \Rightarrow 3x - 2y = 0, \quad v_2 = (2, 3).$$

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Paso 4. Comprobación. $AP = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 6 \end{pmatrix} = PD$.

2. (una 3×3 triangular) Diagonaliza

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Solución.

Paso 1. Autovalores. $A - \lambda I$ es triangular, y su determinante es el producto de la diagonal: $p(\lambda) = (1 - \lambda)(2 - \lambda)(3 - \lambda)$. Tres autovalores distintos, 1, 2, 3: diagonaliza seguro.

Paso 2. $\lambda = 1$.

$$A - I = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow z = 0, y = 0, \quad v_1 = (1, 0, 0).$$

Paso 3. $\lambda = 2$.

$$A - 2I = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow z = 0, x = y, \quad v_2 = (1, 1, 0).$$

Paso 4. $\lambda = 3$.

$$A - 3I = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow y = z, x = \frac{y}{2}, \quad v_3 = (1, 2, 2).$$

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Paso 5. Comprobación. $AP = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} = PD$.

 **3.** (*comparar multiplicidades*) Para cada matriz, calcula m_a y m_g de cada autovalor y decide si diagonaliza. Si diagonaliza, da P y D .

$$\text{a) } A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{b) } B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Solución. a)

Paso 1. Polinomio característico. Desarrollamos por la tercera fila:

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda I) &= (2 - \lambda)[(3 - \lambda)(1 - \lambda) + 1] \\ &= (2 - \lambda)(\lambda^2 - 4\lambda + 4) = (2 - \lambda)^3. \end{aligned}$$

Un único autovalor, $\lambda = 2$, con $m_a = 3$.

Paso 2. Su núcleo.

$$A - 2I = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_2+F_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Rango 1, así que $m_g = 3 - 1 = 2$.

$m_a = 3, m_g = 2$: A no diagonaliza.

b)

Paso 1. Autovalores sin polinomio. B tiene rango 1, así que $\lambda = 0$ tiene $m_g = 3 - 1 = 2$. Como $m_a \geq m_g$, 0 es al menos doble. La traza es 3 y es la suma de los autovalores: $0 + 0 + \lambda_3 = 3$, $\lambda_3 = 3$. (Con el determinante: $p(\lambda) = -\lambda^2(\lambda - 3)$.)

Paso 2. $\lambda = 0$. El sistema es $x + y + z = 0$: $v_1 = (1, -1, 0)$, $v_2 = (1, 0, -1)$. $m_g = 2 = m_a$.

Paso 3. $\lambda = 3$.

$$B - 3I = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{reducimos}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \implies y = z, x = z, \quad v_3 = (1, 1, 1).$$

B diagonaliza: $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$

Paso 4. Comprobación. BP tiene columnas $(0, 0, 0)$, $(0, 0, 0)$ y $(3, 3, 3)$, que son las de PD . Y $\det P = 3 \neq 0$.

 **4.** (*una simétrica*) Diagonaliza $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ con una matriz ortogonal Q .

Solución.

Paso 1. Polinomio característico. Traza 1, determinante -6 :

$$p(\lambda) = \lambda^2 - \lambda - 6 = (\lambda - 3)(\lambda + 2).$$

Paso 2. $\lambda = 3$.

$$A - 3I = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -4 \end{pmatrix} \Rightarrow x = 2y, \quad v_1 = (2, 1).$$

Paso 3. $\lambda = -2$.

$$A + 2I = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow y = -2x, \quad v_2 = (1, -2).$$

Paso 4. Normalizar. $v_1 \cdot v_2 = 2 - 2 = 0$: ya son perpendiculares, como asegura la simetría. Los dos tienen norma $\sqrt{5}$.

$$Q = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}, \quad A = QDQ^t.$$

Paso 5. Comprobación. Traza: $3 - 2 = 1$. Determinante: $3 \cdot (-2) = -6$.

5. (calcular A^n) Con la diagonalización del ejercicio 1, calcula A^n para $A = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 6 & -2 \end{pmatrix}$.

Solución.

Paso 1. P^{-1} . $P = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$, $\det P = 3 - 4 = -1$:

$$P^{-1} = \frac{1}{-1} \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Paso 2. Multiplicar.

$$\begin{aligned} A^n &= \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2^{n+1} \\ 2 & 3 \cdot 2^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -3 + 2^{n+2} & 2 - 2^{n+1} \\ -6 + 6 \cdot 2^n & 4 - 3 \cdot 2^n \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Paso 3. Comprobación. $n = 0$ da $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $n = 1$ da $\begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 6 & -2 \end{pmatrix}$.

$$A^n = \begin{pmatrix} 2^{n+2} - 3 & 2 - 2^{n+1} \\ 6 \cdot 2^n - 6 & 4 - 3 \cdot 2^n \end{pmatrix}.$$

6. (un parámetro fuera de la diagonal) Discute, según el valor de $a \in \mathbb{R}$, si diagonaliza

$$A = \begin{pmatrix} 2 & a & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Cuando lo haga, da P y D .

Solución.

Paso 1. Autovalores. Es triangular: $\lambda = 2$ doble y $\lambda = 1$ simple, para cualquier a . Solo hay que mirar $\lambda = 2$.

Paso 2. Rango de $A - 2I$.

$$A - 2I = \begin{pmatrix} 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Las filas no nulas son $(0, a, 1)$ y $(0, 0, -1)$.

- Si $a \neq 0$, son independientes: rango 2, $m_g = 1 < 2$. No diagonaliza.
- Si $a = 0$, la primera es la segunda por -1 : rango 1, $m_g = 2 = m_a$. Diagonaliza.

Paso 3. Autovectores con $a = 0$. Para $\lambda = 2$ el sistema es $z = 0$: $(1, 0, 0)$ y $(0, 1, 0)$. Para $\lambda = 1$:

$$A - I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \implies x = -z, y = 0, \quad (1, 0, -1).$$

$$\text{Diagonaliza solo si } a = 0, \text{ con } P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Paso 4. Comprobación. La tercera columna: $A(1, 0, -1) = (2 - 1, 0, -1) = (1, 0, -1)$, autovalor 1. Las otras dos son e_1 y e_2 , que A multiplica por 2.

7. (el parámetro mueve los autovalores) Discute, según $a \in \mathbb{R}$, si diagonaliza

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Solución.

Paso 1. Autovalores. Triangular: 1, a y 2. Si a no es ni 1 ni 2, son distintos y diagonaliza. Quedan dos casos en que un autovalor se vuelve doble.

Paso 2. Caso $a = 1$. Autovalor 1 doble.

$$A - I = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \implies \text{rango } 2, \quad m_g = 1 < 2.$$

No diagonaliza.

Paso 3. Caso $a = 2$. Autovalor 2 doble.

$$A - 2I = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \implies \text{rango } 1, \quad m_g = 2 = m_a.$$

Diagonaliza: los autovectores de 2 son $x = y$, $(1, 1, 0)$ y $(0, 0, 1)$; el de 1 es $(1, 0, 0)$.

$$\text{Diagonaliza si y solo si } a \neq 1. \text{ Para } a = 2: P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Paso 4. Comprobación ($a = 2$). $AP = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = PD.$

8. (un modelo de dos estados) Cada año, el 10 % de los habitantes de una ciudad se muda al campo y el 20 % de los del campo se muda a la ciudad. Hoy viven 300 mil personas en la ciudad y 600 mil en el campo. ¿Cuántas habrá en cada sitio dentro de n años? ¿Y a largo plazo?

Solución.

Paso 1. Plantear. Con $x_n = (c_n, k_n)$ (miles en ciudad y campo):

$$\begin{pmatrix} c_{n+1} \\ k_{n+1} \end{pmatrix} = \underbrace{\frac{1}{10} \begin{pmatrix} 9 & 2 \\ 1 & 8 \end{pmatrix}}_M \begin{pmatrix} c_n \\ k_n \end{pmatrix}, \quad x_n = M^n x_0.$$

Paso 2. Autovalores. Traza $\frac{17}{10}$, determinante $\frac{72-2}{100} = \frac{7}{10}$:

$$\lambda^2 - \frac{17}{10}\lambda + \frac{7}{10} = (\lambda - 1)(\lambda - \frac{7}{10}).$$

Paso 3. Autovectores.

$$\lambda = 1: \quad M - I = \frac{1}{10} \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \implies x = 2y, \quad (2, 1)$$

$$\lambda = \frac{7}{10}: \quad M - \frac{7}{10}I = \frac{1}{10} \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \implies y = -x, \quad (1, -1).$$

Paso 4. $x_n = PD^n P^{-1}x_0$. Con $P = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $P^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$:

$$P^{-1}x_0 = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 300 + 600 \\ 300 - 1200 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 300 \\ -300 \end{pmatrix}$$

$$x_n = P \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0,7^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 300 \\ -300 \end{pmatrix} = 300 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} - 300 \cdot 0,7^n \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Paso 5. Comprobación. $n = 1$: la fórmula da $(600 - 210, 300 + 210) = (390, 510)$, y directamente $c_1 = 270 + 120 = 390$, $k_1 = 30 + 480 = 510$.

$c_n = 600 - 300 \cdot 0,7^n$, $k_n = 300 + 300 \cdot 0,7^n$ (miles). A largo plazo, 600 mil en la ciudad y 300 mil en el campo.

9. (una recurrencia en forma matricial) La sucesión $a_{n+1} = a_n + 2a_{n-1}$, con $a_0 = 0$ y $a_1 = 1$, empieza 0, 1, 1, 3, 5, 11, ... Escríbela como $x_{n+1} = Mx_n$ con $x_n = (a_{n+1}, a_n)$ y usa la diagonalización de M para hallar a_n .

Solución.

Paso 1. Plantear.

$$\begin{pmatrix} a_{n+2} \\ a_{n+1} \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_M \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ a_n \end{pmatrix}, \quad x_n = M^n x_0, \quad x_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Paso 2. Autovalores. Traza 1, determinante -2 : $\lambda^2 - \lambda - 2 = (\lambda - 2)(\lambda + 1)$.

Paso 3. Autovectores.

$$\begin{aligned} \lambda = 2: \quad M - 2I &= \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow x = 2y, \quad (2, 1) \\ \lambda = -1: \quad M + I &= \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow y = -x, \quad (1, -1). \end{aligned}$$

Paso 4. x_n . Es la misma P del ejercicio anterior:

$$\begin{aligned} P^{-1}x_0 &= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ x_n &= \frac{1}{3} \left[2^n \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + (-1)^n \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right]. \end{aligned}$$

a_n es la segunda componente.

Paso 5. Comprobación. $a_3 = (8 + 1)/3 = 3$ y $a_5 = (32 + 1)/3 = 11$.

$$a_n = \frac{2^n - (-1)^n}{3}.$$

Con $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ el mismo camino da la fórmula de Fibonacci; solo cambian los autovalores, que son $\frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$.