

EDOs de primer orden — Resolución detallada

Cómo reconocer el tipo y qué cambio la resuelve

Grados de Ciencias e Ingeniería

1. Dos ejemplos para empezar

Ejemplo 1: una ecuación separable

Queremos resolver

$$y' = x y^2, \quad y(0) = 1.$$

Paso 1. Reconocemos el tipo. El lado derecho es un factor que solo depende de x por otro que solo depende de y . Eso es una ecuación *separable*.

Paso 2. Separamos. Escribimos $y' = \frac{dy}{dx}$ y pasamos cada variable a su lado. Para dividir entre y^2 suponemos $y \neq 0$:

$$\frac{dy}{y^2} = x dx.$$

Paso 3. Integramos los dos lados. Una sola constante basta:

$$\begin{aligned} \int \frac{dy}{y^2} &= \int x dx \\ -\frac{1}{y} &= \frac{x^2}{2} + C. \end{aligned}$$

Paso 4. Despejamos y .

$$y = \frac{-1}{\frac{x^2}{2} + C} = \frac{-2}{x^2 + 2C}.$$

Paso 5. Condición inicial. En $-\frac{1}{y} = \frac{x^2}{2} + C$ ponemos $x = 0, y = 1$: $-1 = C$. Entonces $x^2 + 2C = x^2 - 2$.

Paso 6. Lo que perdimos al dividir. $y = 0$ también cumple $y' = xy^2$ (los dos lados valen 0), y no sale de la fórmula para ningún C . Es una solución más; aquí no es la nuestra porque $y(0) = 1$.

$$y = \frac{2}{2 - x^2}, \text{ definida en } -\sqrt{2} < x < \sqrt{2}.$$

Paso 7. Comprobamos. $y' = \frac{4x}{(2 - x^2)^2}$ y $x y^2 = x \cdot \frac{4}{(2 - x^2)^2}$. Coinciden, y $y(0) = \frac{2}{2} = 1$.

Ejemplo 2: una ecuación lineal

$$y' + \frac{y}{x} = x^2, \quad x > 0.$$

Paso 1. Reconocemos el tipo. y e y' aparecen solo a la primera potencia y sin multiplicarse entre sí: es *lineal*, de la forma $y' + p(x)y = q(x)$ con $p = \frac{1}{x}$ y $q = x^2$.

Paso 2. Factor integrante. Multiplicamos por $\mu = e^{\int p dx}$:

$$\mu = e^{\int \frac{1}{x} dx} = e^{\ln x} = x.$$

Paso 3. El lado izquierdo es una derivada. Multiplicando la ecuación por x :

$$\begin{aligned} x y' + y &= x^3 \\ (x y)' &= x^3. \end{aligned}$$

Paso 4. Integramos. La constante se pone *ahora*, antes de despejar:

$$\begin{aligned} x y &= \frac{x^4}{4} + C \\ y &= \frac{x^3}{4} + \frac{C}{x}. \end{aligned}$$

$$y = \frac{x^3}{4} + \frac{C}{x}.$$

Paso 5. Comprobamos. $y' = \frac{3x^2}{4} - \frac{C}{x^2}$ y $\frac{y}{x} = \frac{x^2}{4} + \frac{C}{x^2}$. Sumando: x^2 .

Todo el tema es esto: mirar la ecuación, decidir de qué tipo es y aplicar el cambio que la lleva a una separable o a una lineal. Lo que sigue es la lista de tipos, en el orden en que conviene probarlos.

2. El método, resumido

Cómo resolver $y' = f(x, y)$: prueba los tipos en este orden.

1. **Separable**, $y' = g(x) h(y)$: $\int \frac{dy}{h(y)} = \int g(x) dx$. Añade las soluciones $h(y) = 0$.
2. **Homogénea**, $y' = F(\frac{y}{x})$: cambio $y = u x$, $y' = u + x u'$. Queda separable en u y x . Si es $y' = F(\frac{ax + by + c}{a'x + b'y + c'})$, traslada antes el origen al punto de corte de las dos rectas.
3. **Lineal**, $y' + p(x)y = q(x)$: multiplica por $\mu = e^{\int p dx}$; queda $(\mu y)' = \mu q$.
4. **Bernoulli**, $y' + p(x)y = q(x)y^n$ ($n \neq 0, 1$): cambio $z = y^{1-n}$. Queda lineal en z . Si $n > 0$, añade $y = 0$.
5. **Exacta**, $M dx + N dy = 0$ con $M_y = N_x$: busca F con $F_x = M$, $F_y = N$; la solución es $F = C$. Si $M_y \neq N_x$, busca un factor integrante (documento *Factor integrante*).
6. **Riccati**, $y' = a(x)y^2 + b(x)y + c(x)$, si conoces una solución y_1 : cambio $y = y_1 + w$. Queda Bernoulli con $n = 2$.

Si nada encaja: despeja y' de otra forma, o mira x como función de y (con $\frac{dx}{dy} = 1/y'$); a veces así es lineal. Al final, comprueba y revisa qué soluciones se perdieron al dividir.

3. Los tipos, uno a uno

3.1. Separables

Si $y' = g(x) h(y)$, para $h(y) \neq 0$ se puede escribir $\frac{dy}{h(y)} = g(x) dx$ e integrar cada lado por separado. Cada raíz $h(y_0) = 0$ da una solución constante $y = y_0$.

Ejemplo. $y' = y \cos x$.

$$\begin{aligned} \int \frac{dy}{y} &= \int \cos x dx \\ \ln |y| &= \sin x + C \\ |y| &= e^C e^{\sin x}. \end{aligned}$$

Quitar el valor absoluto cambia $e^C > 0$ por una constante K de cualquier signo. Y $K = 0$ recupera $y = 0$, la solución que perdimos al dividir.

$$y = K e^{\sin x}, \quad K \in \mathbb{R}.$$

Dividir entre $h(y)$ pierde las soluciones $h(y) = 0$. Hay que buscarlas aparte y ver si la fórmula general las recoge con algún valor de la constante. Si no las recoge, se añaden al resultado.

$\int \frac{dy}{y} = \ln |y|$, con valor absoluto. Olvidarlo deja fuera las soluciones negativas: $y = K e^{\sin x}$ vale también para $K < 0$.

3.2. Homogéneas

Si y' depende solo del cociente $\frac{y}{x}$, el cambio $y = u x$ convierte la ecuación en separable. Se reconoce porque al cambiar x por tx e y por ty el lado derecho no cambia.

Ejemplo. $y' = \frac{x^2 + y^2}{xy}$, con $x > 0$.

Paso 1. Cambio. Dividiendo arriba y abajo entre x^2 , el lado derecho es $\frac{1+u^2}{u}$. Con $y' = u + x u'$:

$$\begin{aligned} u + x u' &= \frac{1 + u^2}{u} \\ x u' &= \frac{1 + u^2}{u} - u = \frac{1}{u}. \end{aligned}$$

Paso 2. Separamos e integramos.

$$\begin{aligned} \int u \, du &= \int \frac{1}{x} \, dx \\ \frac{u^2}{2} &= \ln x + C. \end{aligned}$$

Paso 3. Deshacemos el cambio. Con $u = \frac{y}{x}$ y llamando C a $2C$:

$$y^2 = 2x^2 \ln x + C x^2.$$

3.3. Reducibles a homogéneas

Si $y' = F\left(\frac{ax + by + c}{a'x + b'y + c'}\right)$ y las rectas $ax + by + c = 0$ y $a'x + b'y + c' = 0$ se cortan en (x_0, y_0) , el cambio $X = x - x_0$, $Y = y - y_0$ quita los términos independientes y la ecuación queda homogénea en X , Y . (Si las rectas son paralelas, el cambio que sirve es $z = ax + by$, y queda separable.)

Ejemplo. $y' = \frac{x + y - 3}{x - y - 1}$.

Paso 1. Punto de corte.

$$\begin{aligned} x + y &= 3 & \implies & 2x = 4, \quad x_0 = 2 \\ x - y &= 1 & \implies & y_0 = 1. \end{aligned}$$

Paso 2. Trasladamos. Con $X = x - 2$, $Y = y - 1$ (y $\frac{dY}{dX} = y'$):

$$Y' = \frac{X + Y}{X - Y}.$$

Paso 3. Homogénea. Con $Y = uX$:

$$\begin{aligned} u + X u' &= \frac{1 + u}{1 - u} \\ X u' &= \frac{1 + u - u + u^2}{1 - u} = \frac{1 + u^2}{1 - u}. \end{aligned}$$

Paso 4. Separamos e integramos.

$$\int \frac{1-u}{1+u^2} du = \int \frac{1}{X} dX$$

$$\operatorname{arctg} u - \frac{1}{2} \ln(1+u^2) = \ln|X| + C.$$

Paso 5. Deshacemos los cambios. Como $\ln|X| + \frac{1}{2} \ln(1+u^2) = \frac{1}{2} \ln(X^2 + Y^2)$:

$$\operatorname{arctg} \frac{y-1}{x-2} - \frac{1}{2} \ln((x-2)^2 + (y-1)^2) = C.$$

3.4. Lineales

Para $y' + p(x)y = q(x)$, el factor $\mu = e^{\int p dx}$ cumple $\mu' = p\mu$, así que $\mu y' + \mu p y = (\mu y)'$. La ecuación queda $(\mu y)' = \mu q$, y basta integrar.

Ejemplo. $y' - 2y = e^x$.

$$\mu = e^{\int -2 dx} = e^{-2x}$$

$$(e^{-2x}y)' = e^{-2x}e^x = e^{-x}$$

$$e^{-2x}y = -e^{-x} + C$$

$$y = -e^x + C e^{2x}.$$

$$y = -e^x + C e^{2x}.$$

La constante aparece al integrar y se despeja con todo lo demás: de $e^{-2x}y = -e^{-x} + C$ sale $C e^{2x}$, no C . Escribir $y = -e^x + C$ es el error más frecuente del tema.

3.5. Bernoulli

En $y' + p(x)y = q(x)y^n$ con $n \neq 0, 1$, se divide entre y^n y se toma $z = y^{1-n}$. Como $z' = (1-n)y^{-n}y'$, la ecuación queda lineal en z : $\frac{z'}{1-n} + pz = q$.

Ejemplo. $y' + \frac{y}{x} = x y^2$.

Paso 1. Dividimos entre y^2 . Para $y \neq 0$: $y^{-2}y' + \frac{y^{-1}}{x} = x$.

Paso 2. Cambio $z = y^{-1}$. Entonces $z' = -y^{-2}y'$:

$$-z' + \frac{z}{x} = x$$

$$z' - \frac{z}{x} = -x.$$

Paso 3. Lineal en z . $\mu = e^{-\ln x} = \frac{1}{x}$:

$$\left(\frac{z}{x}\right)' = -1$$

$$z = -x^2 + C x.$$

Paso 4. Volvemos a y y recuperamos $y = 0$.

$$y = \frac{1}{Cx - x^2}, \text{ y además } y = 0.$$

3.6. Exactas

La ecuación $M dx + N dy = 0$ es exacta si $M_y = N_x$. Entonces hay una F con $F_x = M$ y $F_y = N$, y las soluciones son las curvas $F(x, y) = C$. Si no es exacta, a veces un factor integrante la convierte en exacta: está todo en el documento *Factor integrante* de Teselado.

Ejemplo. $(2xy + 3) dx + (x^2 + 4y) dy = 0$.

Paso 1. ¿Es exacta? $M_y = 2x$ y $N_x = 2x$. Sí.

Paso 2. Potencial.

$$\begin{aligned} F &= \int (2xy + 3) dx = x^2 y + 3x + h(y) \\ F_y &= x^2 + h'(y) = x^2 + 4y \implies h(y) = 2y^2. \end{aligned}$$

$$x^2 y + 3x + 2y^2 = C.$$

3.7. Riccati

La ecuación $y' = a(x)y^2 + b(x)y + c(x)$ no se resuelve en general. Pero si se conoce una solución y_1 , el cambio $y = y_1 + w$ da $w' = (2ay_1 + b)w + aw^2$: una Bernoulli con $n = 2$. La y_1 suele darse en el enunciado, o se tantea ($y = \frac{k}{x}$, $y = kx$, $y = e^{kx} \dots$).

Ejemplo. $y' = y^2 - \frac{2}{x^2}$, sabiendo que $y_1 = \frac{1}{x}$ es solución.

Paso 1. Cambio $y = \frac{1}{x} + w$.

$$\begin{aligned} -\frac{1}{x^2} + w' &= \frac{1}{x^2} + \frac{2w}{x} + w^2 - \frac{2}{x^2} \\ w' &= \frac{2}{x} w + w^2. \end{aligned}$$

Paso 2. Bernoulli: $z = \frac{1}{w}$. Como $z' = -\frac{w'}{w^2}$:

$$\begin{aligned} z' + \frac{2}{x} z &= -1 \\ (x^2 z)' &= -x^2 \\ x^2 z &= -\frac{x^3}{3} + C \\ z &= \frac{3C - x^3}{3x^2}. \end{aligned}$$

Paso 3. Volvemos. Con $K = 3C$, $w = \frac{3x^2}{K - x^3}$.

$$y = \frac{1}{x} + \frac{3x^2}{K - x^3}, \text{ y además } y = \frac{1}{x} \text{ (la que corresponde a } w = 0).$$

En un problema de valor inicial, la condición se impone sobre la solución *general*, contando las que se añadieron aparte. Por ejemplo, $y' = xy^2$ con $y(0) = 0$ no sale de $y = \frac{-2}{x^2+2C}$ para ningún C : su solución es $y = 0$. Y el resultado vale solo en el intervalo que contiene al punto inicial y donde la fórmula no explota.

4. Ejercicios

Niveles de dificultad

 El tipo viene dado: aplicar la receta.

 Reconocer el tipo, despejar antes o recuperar una solución perdida.

 Dos cambios seguidos, o hay que encontrar la pieza que falta.

 La ecuación va disfrazada: hay que verla de otra manera.

 1. (*separable*) Resuelve $y' = 2xy$, $y(0) = 3$.

Solución.

Paso 1. Separamos. Para $y \neq 0$:

$$\begin{aligned} \int \frac{dy}{y} &= \int 2x \, dx \\ \ln |y| &= x^2 + C \\ y &= K e^{x^2}. \end{aligned}$$

K tiene cualquier signo, y $K = 0$ recoge $y = 0$.

Paso 2. Condición inicial. $y(0) = K = 3$.

Paso 3. Comprobamos. $y' = 6x e^{x^2} = 2x \cdot 3e^{x^2}$.

$$y = 3e^{x^2}.$$

 2. (*lineal*) Resuelve $y' + y = x$, $y(0) = 0$.

Solución.

Paso 1. Factor integrante. $p = 1$, $\mu = e^x$.

Paso 2. Integramos. $\int x e^x \, dx = (x - 1) e^x$, por partes:

$$\begin{aligned} (e^x y)' &= x e^x \\ e^x y &= (x - 1) e^x + C \\ y &= x - 1 + C e^{-x}. \end{aligned}$$

Paso 3. Condición inicial. $y(0) = -1 + C = 0$, $C = 1$.

Paso 4. Comprobamos. $y' = 1 - e^{-x}$ e $y' + y = 1 - e^{-x} + x - 1 + e^{-x} = x$.

$$y = x - 1 + e^{-x}.$$

3. (homogénea) Resuelve $y' = \frac{y^2 + 2xy}{x^2}$ y comprueba si se pierde alguna solución.

Solución.

Paso 1. Cambio $y = ux$. El lado derecho es $u^2 + 2u$:

$$\begin{aligned} u + x u' &= u^2 + 2u \\ x u' &= u^2 + u. \end{aligned}$$

Paso 2. Separamos. Para $u \neq 0, -1$, con $\frac{1}{u(u+1)} = \frac{1}{u} - \frac{1}{u+1}$:

$$\begin{aligned} \int \left(\frac{1}{u} - \frac{1}{u+1} \right) du &= \int \frac{1}{x} dx \\ \ln \left| \frac{u}{u+1} \right| &= \ln |x| + C \\ \frac{u}{u+1} &= Kx. \end{aligned}$$

Paso 3. Despejamos. $u = Kx(u+1)$, $u(1-Kx) = Kx$, $u = \frac{Kx}{1-Kx}$, y $y = ux$.

Paso 4. Soluciones perdidas. $u = 0$ es $y = 0$, que sale con $K = 0$. $u = -1$ es $y = -x$: cumple la ecuación ($y' = -1$ y $\frac{x^2 - 2x^2}{x^2} = -1$) y no sale para ningún K .

$$y = \frac{Kx^2}{1-Kx}, \text{ y además } y = -x.$$

4. (Bernoulli) Resuelve $y' - y = e^x y^2$.

Solución.

Paso 1. Dividimos entre y^2 . $y^{-2}y' - y^{-1} = e^x$.

Paso 2. Cambio $z = y^{-1}$, $z' = -y^{-2}y'$.

$$\begin{aligned} -z' - z &= e^x \\ z' + z &= -e^x. \end{aligned}$$

Paso 3. Lineal. $\mu = e^x$:

$$\begin{aligned} (e^x z)' &= -e^{2x} \\ e^x z &= -\frac{e^{2x}}{2} + C \\ z &= \frac{2C - e^{2x}}{2e^x}. \end{aligned}$$

Paso 4. Volvemos. $y = \frac{1}{z}$ y llamamos $K = 2C$. Además, $y = 0$ cumple la ecuación.

$$y = \frac{2e^x}{K - e^{2x}}, \text{ y además } y = 0.$$

5. (exacta) Resuelve $(y \cos x + 2x e^y) dx + (\sin x + x^2 e^y - 1) dy = 0$.

Solución.

Paso 1. ¿Es exacta? $M_y = \cos x + 2x e^y$ y $N_x = \cos x + 2x e^y$. Sí.

Paso 2. Potencial.

$$F = \int (y \cos x + 2x e^y) dx = y \sin x + x^2 e^y + h(y)$$

$$F_y = \sin x + x^2 e^y + h'(y) = \sin x + x^2 e^y - 1 \implies h(y) = -y.$$

$$y \sin x + x^2 e^y - y = C.$$

6. (reconocer: despejar primero) Di de qué tipo es y resuelve: $x y' - 2y = x^3 \cos x$, $x > 0$.

Solución.

Paso 1. Despejamos. Dividiendo entre x : $y' - \frac{2}{x} y = x^2 \cos x$. Es lineal.

Paso 2. Factor integrante. $\mu = e^{-2 \ln x} = \frac{1}{x^2}$:

$$\left(\frac{y}{x^2}\right)' = \cos x$$

$$\frac{y}{x^2} = \sin x + C.$$

Paso 3. Comprobamos. $y' = 2x \sin x + x^2 \cos x + 2Cx$, y $xy' - 2y = 2x^2 \sin x + x^3 \cos x + 2Cx^2 - 2x^2 \sin x - 2Cx^2 = x^3 \cos x$.

$$y = x^2 \sin x + C x^2.$$

7. (reconocer: homogénea) Di de qué tipo es y resuelve: $x y' = y + x \cos^2 \frac{y}{x}$, $x > 0$.

Solución.

Paso 1. Tipo. Dividiendo entre x : $y' = \frac{y}{x} + \cos^2 \frac{y}{x}$. Solo depende de $\frac{y}{x}$: homogénea.

Paso 2. Cambio $y = ux$.

$$u + x u' = u + \cos^2 u$$

$$\int \frac{1}{\cos^2 u} du = \int \frac{1}{x} dx$$

$$\operatorname{tg} u = \ln x + C.$$

Como tg tiene periodo π , despejar da $u = \operatorname{arctg}(\ln x + C) + k\pi$, no solo el arco principal.

Paso 3. Soluciones perdidas. Dividimos entre $\cos^2 u$: se pierden $u = \frac{\pi}{2} + k\pi$, es decir $y = (\frac{\pi}{2} + k\pi)x$. Cumplen la ecuación: $xy' = (\frac{\pi}{2} + k\pi)x = y + x \cdot 0$.

$$y = x(\operatorname{arctg}(\ln x + C) + k\pi), \text{ y además } y = (\frac{\pi}{2} + k\pi)x, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

8. (Riccati con la solución dada) Comprueba que $y_1 = e^x$ es solución de $y' = e^{-x}y^2 + y - e^x$ y resuelve la ecuación.

Solución.

Paso 1. Comprobamos y_1 . $e^{-x}e^{2x} + e^x - e^x = e^x = y_1'$.

Paso 2. Cambio $y = e^x + w$.

$$\begin{aligned} e^x + w' &= e^{-x}(e^{2x} + 2e^xw + w^2) + e^x + w - e^x \\ w' &= 3w + e^{-x}w^2. \end{aligned}$$

Paso 3. Bernoulli: $z = \frac{1}{w}$, $z' = -\frac{w'}{w^2}$.

$$\begin{aligned} z' + 3z &= -e^{-x} \\ (e^{3x}z)' &= -e^{2x} \\ e^{3x}z &= -\frac{e^{2x}}{2} + C \\ z &= \frac{2C - e^{2x}}{2e^{3x}}. \end{aligned}$$

Paso 4. Volvemos. Con $K = 2C$, $w = \frac{2e^{3x}}{K - e^{2x}}$.

$$y = e^x + \frac{2e^{3x}}{K - e^{2x}}, \text{ y además } y = e^x.$$

9. (reconocer: Bernoulli) Di de qué tipo es y resuelve: $xy' + y = y^2 \ln x$, $x > 0$.

Solución.

Paso 1. Tipo. Dividiendo entre x : $y' + \frac{y}{x} = \frac{\ln x}{x}y^2$. Bernoulli con $n = 2$.

Paso 2. Cambio $z = y^{-1}$. Dividimos entre y^2 y usamos $z' = -y^{-2}y'$:

$$\begin{aligned} -z' + \frac{z}{x} &= \frac{\ln x}{x} \\ z' - \frac{z}{x} &= -\frac{\ln x}{x}. \end{aligned}$$

Paso 3. Lineal. $\mu = \frac{1}{x}$. La integral sale por partes:

$$\begin{aligned}\left(\frac{z}{x}\right)' &= -\frac{\ln x}{x^2} \\ \frac{z}{x} &= \frac{\ln x}{x} - \int \frac{1}{x^2} dx = \frac{\ln x}{x} + \frac{1}{x} + C \\ z &= \ln x + 1 + Cx.\end{aligned}$$

Paso 4. Volvemos y recuperamos $y = 0$.

$$y = \frac{1}{\ln x + 1 + Cx}, \text{ y además } y = 0.$$

10. (reducible a homogénea, punto de corte entero) Resuelve $y' = \frac{x + 3y - 4}{3x + y - 4}$.

Solución.

Paso 1. Punto de corte.

$$\begin{aligned}x + 3y &= 4 & \implies & \text{restando: } 2y - 2x = 0, \quad y = x \\ 3x + y &= 4 & \implies & 4x = 4, \quad x_0 = 1, \quad y_0 = 1.\end{aligned}$$

Paso 2. Trasladamos. Con $X = x - 1$, $Y = y - 1$: $Y' = \frac{X + 3Y}{3X + Y}$.

Paso 3. Homogénea, $Y = uX$.

$$\begin{aligned}u + Xu' &= \frac{1 + 3u}{3 + u} \\ Xu' &= \frac{1 + 3u - 3u - u^2}{3 + u} = \frac{1 - u^2}{3 + u}.\end{aligned}$$

Paso 4. Separamos e integramos. Por fracciones simples, $\frac{3+u}{1-u^2} = \frac{2}{1-u} + \frac{1}{1+u}$:

$$\begin{aligned}\int \left(\frac{2}{1-u} + \frac{1}{1+u} \right) du &= \int \frac{1}{X} dX \\ -2 \ln |1-u| + \ln |1+u| &= \ln |X| + C \\ \frac{1+u}{(1-u)^2} &= KX.\end{aligned}$$

Paso 5. Deshacemos. Con $u = \frac{Y}{X}$: $\frac{X(X+Y)}{(X-Y)^2} = KX$, es decir $X + Y = K(X - Y)^2$, y $X + Y = x + y - 2$, $X - Y = x - y$.

Paso 6. Soluciones perdidas. Dividimos entre $1 - u^2$: se pierden $u = \pm 1$. $u = -1$ es $x + y = 2$, que ya está ($K = 0$); $u = 1$ es $y = x$, que no está. Cumple la ecuación: $y' = 1 = \frac{4x-4}{4x-4}$.

Paso 7. Comprobamos. Derivando $x + y - 2 = K(x - y)^2$: $1 + y' = 2K(x - y)(1 - y')$, y con $K = \frac{x+y-2}{(x-y)^2}$ queda $y' = \frac{x+3y-4}{3x+y-4}$.

$$x + y - 2 = K(x - y)^2, \text{ y además } y = x.$$

11. (reducible a homogénea) Resuelve $y' = \frac{y - x - 1}{y + x - 3}$.

Solución.

Paso 1. Punto de corte.

$$\begin{aligned} y - x &= 1 & \implies 2y &= 4, \quad y_0 = 2 \\ y + x &= 3 & \implies x_0 &= 1. \end{aligned}$$

Paso 2. Trasladamos. Con $X = x - 1$, $Y = y - 2$: $Y' = \frac{Y - X}{Y + X}$.

Paso 3. Homogénea, $Y = uX$.

$$\begin{aligned} u + X u' &= \frac{u - 1}{u + 1} \\ X u' &= \frac{u - 1 - u^2 - u}{u + 1} = -\frac{1 + u^2}{u + 1}. \end{aligned}$$

Paso 4. Separamos e integramos.

$$\int \frac{u + 1}{1 + u^2} du = - \int \frac{1}{X} dX$$

$$\frac{1}{2} \ln(1 + u^2) + \arctg u = - \ln |X| + C.$$

Paso 5. Deshacemos. $\ln |X| + \frac{1}{2} \ln(1 + u^2) = \frac{1}{2} \ln(X^2 + Y^2)$.

$$\frac{1}{2} \ln((x - 1)^2 + (y - 2)^2) + \arctg \frac{y - 2}{x - 1} = C.$$

12. (Riccati: buscar la solución) Busca una solución de la forma $y = \frac{k}{x}$ de $y' = y^2 - \frac{y}{x} - \frac{1}{x^2}$ y resuelve la ecuación.

Solución.

Paso 1. Tanteamos $y = \frac{k}{x}$.

$$\begin{aligned} -\frac{k}{x^2} &= \frac{k^2}{x^2} - \frac{k}{x^2} - \frac{1}{x^2} \\ k^2 &= 1 \implies k = \pm 1. \end{aligned}$$

Tomamos $y_1 = \frac{1}{x}$.

Paso 2. Cambio $y = \frac{1}{x} + w$.

$$\begin{aligned} -\frac{1}{x^2} + w' &= \frac{1}{x^2} + \frac{2w}{x} + w^2 - \frac{1}{x^2} - \frac{w}{x} - \frac{1}{x^2} \\ w' &= \frac{w}{x} + w^2. \end{aligned}$$

Paso 3. Bernoulli: $z = \frac{1}{w}$.

$$\begin{aligned} z' + \frac{z}{x} &= -1 \\ (xz)' &= -x \\ z &= \frac{2C - x^2}{2x}. \end{aligned}$$

Paso 4. Volvemos. Con $K = 2C$, $w = \frac{2x}{K - x^2}$.

Paso 5. Comprobación. La otra solución, $y = -\frac{1}{x}$, debe estar en la familia: con $K = 0$ sale $\frac{1}{x} - \frac{2}{x} = -\frac{1}{x}$.

$$y = \frac{1}{x} + \frac{2x}{K - x^2}, \text{ y además } y = \frac{1}{x}.$$

13. (lineal en x) La ecuación $y' = \frac{y}{2x + y^3}$ no es lineal en y . Escríbela para $\frac{dx}{dy}$, comprueba que es lineal en x y resuélvela.

Solución.

Paso 1. Invertimos. Donde $y' \neq 0$, $\frac{dx}{dy} = \frac{1}{y'}$:

$$\frac{dx}{dy} = \frac{2x + y^3}{y} = \frac{2}{y}x + y^2.$$

Lineal en x : $x' - \frac{2}{y}x = y^2$.

Paso 2. Factor integrante. $\mu = e^{-2 \ln |y|} = \frac{1}{y^2}$:

$$\begin{aligned} \left(\frac{x}{y^2}\right)' &= 1 \\ \frac{x}{y^2} &= y + C. \end{aligned}$$

Paso 3. Lo que se pierde al invertir. $y = 0$ tiene $y' = 0$ y cumple la ecuación original ($0 = \frac{0}{2x}$).

$$x = y^3 + C y^2, \text{ y además } y = 0.$$

14. (disfrazada) Resuelve $y' = \frac{1}{x \cos y + \sin 2y}$.

Solución.

Paso 1. Ningún tipo encaja en y . Pero el denominador es lineal en x . Invertimos:

$$\frac{dx}{dy} = x \cos y + 2 \sin y \cos y.$$

Paso 2. Factor integrante. $p = -\cos y$, $\mu = e^{-\operatorname{sen} y}$:

$$(x e^{-\operatorname{sen} y})' = 2 \operatorname{sen} y \cos y e^{-\operatorname{sen} y}.$$

Paso 3. Integramos. Con $s = \operatorname{sen} y$, $ds = \cos y dy$, y por partes:

$$\begin{aligned} \int 2s e^{-s} ds &= -2s e^{-s} + \int 2e^{-s} ds = -2(s+1)e^{-s} \\ x e^{-\operatorname{sen} y} &= -2(\operatorname{sen} y + 1)e^{-\operatorname{sen} y} + C. \end{aligned}$$

Paso 4. Comprobamos. Con $x = C e^{\operatorname{sen} y} - 2 \operatorname{sen} y - 2$: $\frac{dx}{dy} = C \cos y e^{\operatorname{sen} y} - 2 \cos y$, y $x \cos y + 2 \operatorname{sen} y \cos y = C \cos y e^{\operatorname{sen} y} - 2 \cos y$.

$$x = C e^{\operatorname{sen} y} - 2 \operatorname{sen} y - 2.$$