

Factor integrante — Resolución detallada

Convertir una ecuación en exacta: cuándo existe y cómo encontrarlo

Grados de Ciencias e Ingeniería

1. Dos ejemplos para empezar

Ejemplo 1: el factor nos lo dan

Queremos resolver

$$2y \, dx + x \, dy = 0.$$

Paso 1. ¿Es exacta? Llamamos $M = 2y$ (lo que acompaña a dx) y $N = x$ (lo que acompaña a dy). Sería exacta si $M_y = N_x$, pero $M_y = 2$ y $N_x = 1$. No lo es.

Paso 2. Multiplicamos por x . La ecuación pasa a ser

$$2xy \, dx + x^2 \, dy = 0.$$

Ahora $M = 2xy$ y $N = x^2$, y $M_y = 2x = N_x$: *ya es exacta*. La x que ha obrado el cambio es el *factor integrante*. De dónde sale lo vemos en el ejemplo 2.

Paso 3. Buscamos F con $F_x = M$ y $F_y = N$. Integramos M respecto de x , tratando y como constante:

$$F = \int 2xy \, dx = x^2 y + h(y).$$

La «constante» $h(y)$ puede depender de y . La fijamos derivando respecto de y e igualando a N : $F_y = x^2 + h'(y) = x^2$, así que $h'(y) = 0$ y basta con $h = 0$.

Paso 4. Las soluciones son las curvas $F = C$.

$$x^2 y = C, \text{ es decir } y = \frac{C}{x^2}.$$

Paso 5. Comprobamos. Derivando $x^2 y = C$ respecto de x : $2xy + x^2 y' = 0$. Es la ecuación del paso 2, que es la original multiplicada por x .

Ejemplo 2: el factor hay que buscarlo

$$(3xy + y^2) \, dx + (x^2 + xy) \, dy = 0.$$

Paso 1. ¿Es exacta? $M_y = 3x + 2y$ y $N_x = 2x + y$. No. Su diferencia,

$$D = M_y - N_x = x + y,$$

mide cuánto le falta para serlo.

Paso 2. Buscamos el factor. Dividimos D entre N :

$$\frac{D}{N} = \frac{x+y}{x(x+y)} = \frac{1}{x}.$$

Solo depende de x , y eso garantiza un factor que depende solo de x (sección 4 explica por qué):

$$\mu(x) = e^{\int \frac{1}{x} dx} = e^{\ln x} = x.$$

Paso 3. Multiplicamos y comprobamos. Queda $(3x^2y + xy^2) dx + (x^3 + x^2y) dy = 0$, y las dos derivadas cruzadas valen $3x^2 + 2xy$. Exacta.

Paso 4. Buscamos F . $F = \int (3x^2y + xy^2) dx = x^3y + \frac{1}{2}x^2y^2 + h(y)$. Derivando, $F_y = x^3 + x^2y + h'(y)$, que debe ser $x^3 + x^2y$: $h' = 0$.

$$x^3y + \frac{1}{2}x^2y^2 = C.$$

Todo el tema es esto: calcular D , adivinar de qué depende el factor y seguir los mismos pasos. Lo que sigue es la lista de casos y por qué funciona cada uno.

2. El método, resumido

Cómo encontrar el factor integrante de $M dx + N dy = 0$.

1. Calcula $D = M_y - N_x$. Si $D = 0$, la ecuación ya es exacta: no hace falta factor.

2. Si $\frac{D}{N}$ depende solo de x : $\mu(x) = \exp \int \frac{D}{N} dx$.

3. Si $-\frac{D}{M}$ depende solo de y : $\mu(y) = \exp \int -\frac{D}{M} dy$.

4. Si no, prueba con $z = x + y$, $z = xy$ o $z = x^2 + y^2$: si $\frac{D}{Nz_x - Mz_y}$ depende solo de z ,

$$\mu(z) = \exp \int \frac{D}{Nz_x - Mz_y} dz.$$

5. Si M y N son homogéneas del mismo grado: $\mu = \frac{1}{xM + yN}$.

6. Último recurso: tanea $\mu = x^m y^n$ e iguala coeficientes.

Con μ en la mano: multiplica, comprueba que $(\mu M)_y = (\mu N)_x$, halla el potencial F y escribe $F(x, y) = C$. Después, revisa qué soluciones se perdieron al multiplicar.

3. La idea

La ecuación $M(x, y) dx + N(x, y) dy = 0$ es *exacta* si existe una función F con $F_x = M$ y $F_y = N$. Entonces las soluciones son las curvas de nivel $F(x, y) = C$. El criterio práctico (en un dominio sin agujeros) es

$$M_y = N_x.$$

Cuando no se cumple, se busca una función $\mu(x, y) \neq 0$ que, al multiplicar la ecuación, la vuelva exacta: $(\mu M)_y = (\mu N)_x$. Desarrollando,

$$N \mu_x - M \mu_y = \mu (M_y - N_x) = \mu D.$$

Esto es una ecuación en derivadas parciales, más difícil que la original. El truco es no resolverla en general, sino buscar μ que dependa de *una sola* variable o combinación de variables. Entonces se convierte en una EDO separable para μ .

4. Los casos, uno a uno

4.1. Factor que depende solo de x

Si $\mu = \mu(x)$, entonces $\mu_y = 0$ y queda $N\mu' = \mu D$, es decir $\mu'/\mu = D/N$. Eso solo tiene sentido si D/N no depende de y .

$$\frac{D}{N} = g(x) \implies \mu(x) = e^{\int g(x) dx}.$$

Es el caso del ejemplo 2.

4.2. Factor que depende solo de y

Ahora $\mu_x = 0$ y queda $-M\mu' = \mu D$: $\mu'/\mu = -D/M$.

$$-\frac{D}{M} = h(y) \implies \mu(y) = e^{\int h(y) dy}.$$

El signo menos es el error más frecuente del tema. Para $\mu(x)$ se divide entre N y *sin* signo; para $\mu(y)$, entre M y *con* signo. Si dudas, vuelve a $N\mu_x - M\mu_y = \mu D$ y anula la derivada que no toca.

Ejemplo. $y dx + (2x - ye^y) dy = 0$.

Paso 1. Calculamos D . $M_y = 1$, $N_x = 2$, $D = -1$.

Paso 2. Elegimos el caso.

$$\begin{aligned} \frac{D}{N} &= \frac{-1}{2x - ye^y} && \text{depende de } x \text{ y de } y: \text{ no sirve} \\ -\frac{D}{M} &= \frac{1}{y} && \text{solo de } y: \mu = e^{\ln y} = y. \end{aligned}$$

Paso 3. Multiplicamos. $y^2 dx + (2xy - y^2 e^y) dy = 0$, con $(y^2)_y = 2y = (2xy - y^2 e^y)_x$.

Paso 4. Potencial.

$$\begin{aligned} F &= \int y^2 dx = xy^2 + h(y) \\ F_y &= 2xy + h'(y) = 2xy - y^2 e^y \\ h(y) &= - \int y^2 e^y dy = -(y^2 - 2y + 2) e^y. \end{aligned}$$

$$xy^2 - (y^2 - 2y + 2)e^y = C.$$

4.3. Factor que depende de una combinación $z(x, y)$

Si $\mu = \mu(z)$ con $z = z(x, y)$, la regla de la cadena da $\mu_x = \mu' z_x$ y $\mu_y = \mu' z_y$, y la ecuación de μ queda

$$\frac{\mu'}{\mu} = \frac{D}{Nz_x - Mz_y}.$$

Funciona si el cociente se puede escribir como función de z sola. Los denominadores de las combinaciones habituales:

z	$Nz_x - Mz_y$
$x + y$	$N - M$
$x - y$	$N + M$
xy	$yN - xM$
$x^2 + y^2$	$2(xN - yM)$

Ejemplo. $(y + xy^2) dx + (x - x^2y) dy = 0$.

Paso 1. Calculamos D . $M_y = 1 + 2xy$, $N_x = 1 - 2xy$, $D = 4xy$. Ni D/N ni $-D/M$ dependen de una sola variable.

Paso 2. Probamos $z = xy$.

$$\begin{aligned} yN - xM &= (xy - x^2y^2) - (xy + x^2y^2) = -2x^2y^2 \\ \frac{D}{yN - xM} &= \frac{4xy}{-2x^2y^2} = -\frac{2}{xy} = -\frac{2}{z} \quad \Rightarrow \quad \mu = e^{-2 \ln z} = \frac{1}{x^2y^2}. \end{aligned}$$

Paso 3. Multiplicamos.

$$\left(\frac{1}{x^2y} + \frac{1}{x}\right)dx + \left(\frac{1}{xy^2} - \frac{1}{y}\right)dy = 0.$$

Paso 4. Potencial.

$$\begin{aligned} F &= \int \left(\frac{1}{x^2y} + \frac{1}{x}\right)dx = -\frac{1}{xy} + \ln|x| + h(y) \\ F_y &= \frac{1}{xy^2} + h'(y) = \frac{1}{xy^2} - \frac{1}{y} \quad \Rightarrow \quad h(y) = -\ln|y|. \end{aligned}$$

$$\ln\left|\frac{x}{y}\right| - \frac{1}{xy} = C, \text{ y además las rectas } x = 0 \text{ e } y = 0.$$

Al multiplicar por μ se pueden *perder* soluciones (donde μ no está definido o vale infinito) y *ganar* soluciones falsas (donde $\mu = 0$). Aquí $\mu = 1/(x^2y^2)$ no existe en $x = 0$ ni en $y = 0$. Sustituyendo en la ecuación original, las dos rectas *son* soluciones: hay que añadirlas a mano.

4.4. La ecuación lineal es un caso particular

La lineal $y' + p(x)y = q(x)$ se escribe $(py - q)dx + dy = 0$. Entonces $M = py - q$, $N = 1$, $D = p(x)$, y $D/N = p(x)$ solo depende de x :

$$\mu(x) = e^{\int p(x) dx}, \text{ y la ecuación queda } (\mu y)' = \mu q.$$

Es el «factor integrante» de los cursos de introducción: el mismo criterio, sin cambios.

4.5. Ecuaciones homogéneas

Si M y N son homogéneas del mismo grado (al cambiar x, y por tx, ty salen multiplicadas por la misma potencia de t) y $xM + yN \neq 0$, entonces

$$\mu = \frac{1}{xM + yN}$$

es factor integrante. Suele dar integrales racionales largas: compara antes con el cambio $y = ux$, que muchas veces es más corto.

4.6. Tantear $\mu = x^m y^n$

Si M y N son sumas de monomios y nada de lo anterior funciona, se propone $\mu = x^m y^n$. Se impone $(\mu M)_y = (\mu N)_x$ y se igualan los coeficientes de cada monomio: salen ecuaciones lineales en m y n . Si el sistema es incompatible, este método no sirve.

5. Después de encontrar μ

1. **Comprueba** que $(\mu M)_y = (\mu N)_x$. Es una línea y caza casi todos los errores de signo.
2. **Integra** μM respecto de x , con una «constante» $h(y)$.
3. **Deriva** respecto de y , iguala a μN y despeja $h'(y)$. Si h' depende de x , hay un error antes.
4. **Escribe** $F(x, y) = C$; despeja y solo si es fácil o te lo piden.
5. **Revisa** los puntos donde μ no existe o se anula, sustituyendo en la ecuación *original*.

μ no lleva constante de integración: cualquier múltiplo $k\mu$ también sirve, así que se toma la más sencilla. Y por la misma razón, $e^{\ln|x|} = |x|$ se puede sustituir por x sin perder nada.

6. Ejercicios

Niveles de dificultad

 Calcular D y aplicar el criterio directo.

 Reconocer el caso, o reescribir la ecuación antes.

 El factor depende de una combinación de x e y , hay que tantearlo, o se pierde una solución.

 Comparar varios factores de la misma ecuación.

1. $(\mu(x))$ Resuelve $(x^2 + y^2 + x) dx + xy dy = 0$.

Solución.

Paso 1. Calculamos D .

$$M_y = 2y, \quad N_x = y, \quad D = M_y - N_x = y.$$

Paso 2. Elegimos el caso.

$$\frac{D}{N} = \frac{y}{xy} = \frac{1}{x} \implies \mu = e^{\ln x} = x.$$

Paso 3. Multiplicamos y comprobamos.

$$(x^3 + xy^2 + x^2) dx + x^2y dy = 0$$

$$(x^3 + xy^2 + x^2)_y = 2xy = (x^2y)_x.$$

Paso 4. Potencial.

$$F = \int (x^3 + xy^2 + x^2) dx = \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{2}x^2y^2 + \frac{1}{3}x^3 + h(y)$$

$$F_y = x^2y + h'(y) = x^2y \implies h' = 0.$$

Paso 5. Solución. $F = C$; multiplicando por 12 queda más limpia.

$$3x^4 + 6x^2y^2 + 4x^3 = C.$$

2. $(\mu(y))$ Resuelve $y dx + (2x + 3y) dy = 0$.

Solución.

Paso 1. Calculamos D . $M_y = 1$, $N_x = 2$, $D = -1$.

Paso 2. Elegimos el caso.

$$\frac{D}{N} = \frac{-1}{2x + 3y} \quad \text{no sirve}$$

$$-\frac{D}{M} = \frac{1}{y} \implies \mu = y.$$

Paso 3. Multiplicamos y comprobamos.

$$y^2 dx + (2xy + 3y^2) dy = 0$$

$$(y^2)_y = 2y = (2xy + 3y^2)_x.$$

Paso 4. Potencial.

$$F = \int y^2 dx = xy^2 + h(y)$$

$$F_y = 2xy + h'(y) = 2xy + 3y^2 \implies h(y) = y^3.$$

Paso 5. Soluciones perdidas o ganadas. $\mu = y$ se anula en $y = 0$. En la ecuación original, $y = 0$ da $0 dx + 2x \cdot 0 = 0$: sí es solución, y ya está en la familia ($C = 0$).

$$xy^2 + y^3 = C.$$

3. (la lineal como exacta) Escribe $y' + 2xy = x$ en la forma $M dx + N dy = 0$, comprueba que el criterio de $\mu(x)$ da el factor de la fórmula de las lineales y resuélvela.

Solución.

Paso 1. Forma diferencial. Con $y' = dy/dx$:

$$dy + (2xy - x) dx = 0, \quad M = 2xy - x, \quad N = 1.$$

Paso 2. Factor.

$$D = M_y - N_x = 2x, \quad \frac{D}{N} = 2x \implies \mu = e^{\int 2x dx} = e^{x^2},$$

que es $e^{\int p(x) dx}$ con $p(x) = 2x$: el factor de las lineales.

Paso 3. Resolvemos. Multiplicando la ecuación por e^{x^2} , el lado izquierdo es una derivada:

$$\begin{aligned} e^{x^2} y' + 2x e^{x^2} y &= x e^{x^2} \\ (e^{x^2} y)' &= x e^{x^2} \\ e^{x^2} y &= \int x e^{x^2} dx = \frac{1}{2} e^{x^2} + C. \end{aligned}$$

$$y = \frac{1}{2} + C e^{-x^2}.$$

4. $(\mu(x+y))$ Resuelve $(xy + y) dx + (xy + x) dy = 0$.

Solución.

Paso 1. Calculamos D . $M_y = x + 1$, $N_x = y + 1$, $D = x - y$.

Paso 2. Los casos de una variable no sirven.

$$\frac{D}{N} = \frac{x - y}{x(y + 1)}, \quad -\frac{D}{M} = \frac{y - x}{y(x + 1)}.$$

Paso 3. Probamos $z = x + y$.

$$N - M = x - y, \quad \frac{D}{N - M} = 1 \implies \mu = e^z = e^{x+y}.$$

Paso 4. Potencial. Integrar $e^{x+y}(xy + y)$ respecto de x pide integrar por partes; es más rápido proponer $F = xy e^{x+y}$ y comprobar:

$$\begin{aligned} F_x &= y e^{x+y} + xy e^{x+y} = e^{x+y}(xy + y) = \mu M \\ F_y &= x e^{x+y} + xy e^{x+y} = e^{x+y}(xy + x) = \mu N. \end{aligned}$$

$$xy e^{x+y} = C.$$

5. (*tantear $x^m y^n$*) Encuentra un factor integrante de la forma $\mu = x^m y^n$ para $(3y + 4xy^2) dx + (2x + 3x^2y) dy = 0$ y resuelve la ecuación.

Solución.

Paso 1. Multiplicamos por $x^m y^n$.

$$\mu M = 3x^m y^{n+1} + 4x^{m+1} y^{n+2}$$

$$\mu N = 2x^{m+1} y^n + 3x^{m+2} y^{n+1}.$$

Paso 2. Derivadas cruzadas.

$$(\mu M)_y = 3(n+1)x^m y^n + 4(n+2)x^{m+1} y^{n+1}$$

$$(\mu N)_x = 2(m+1)x^m y^n + 3(m+2)x^{m+1} y^{n+1}.$$

Paso 3. Igualamos monomio a monomio.

$$x^m y^n : 3(n+1) = 2(m+1) \implies 2m - 3n = 1$$

$$x^{m+1} y^{n+1} : 4(n+2) = 3(m+2) \implies 3m - 4n = 2.$$

Multiplicando la primera por 3 y la segunda por 2 y restando: $-n = -1$, $n = 1$, $m = 2$.

Paso 4. Potencial. Con $\mu = x^2 y$:

$$F = \int (3x^2 y^2 + 4x^3 y^3) dx = x^3 y^2 + x^4 y^3 + h(y)$$

$$F_y = 2x^3 y + 3x^4 y^2 + h'(y) = \mu N \implies h' = 0.$$

$$x^3 y^2 + x^4 y^3 = C.$$

6. (*una solución que se pierde*) Resuelve $y dx + (y^2 - x) dy = 0$ y comprueba si el factor integrante hace perder alguna solución.

Solución.

Paso 1. Calculamos D . $M_y = 1$, $N_x = -1$, $D = 2$.

Paso 2. Elegimos el caso.

$$\frac{D}{N} = \frac{2}{y^2 - x} \quad \text{no sirve}$$

$$-\frac{D}{M} = -\frac{2}{y} \implies \mu = e^{-2 \ln y} = \frac{1}{y^2}.$$

Paso 3. Multiplicamos. $\frac{1}{y} dx + \left(1 - \frac{x}{y^2}\right) dy = 0$, con derivadas cruzadas $-\frac{1}{y^2}$ en los dos lados.

Paso 4. Potencial.

$$F = \int \frac{1}{y} dx = \frac{x}{y} + h(y)$$

$$F_y = -\frac{x}{y^2} + h'(y) = 1 - \frac{x}{y^2} \quad \Rightarrow \quad h(y) = y.$$

Paso 5. Soluciones perdidas. $\mu = 1/y^2$ no existe en $y = 0$. En la ecuación original, $y = 0$ (con $dy = 0$) da $0 \cdot dx + 0 = 0$: es solución, y no está en la familia $\frac{x}{y} + y = C$, que exige $y \neq 0$. Hay que añadirla.

$$\frac{x}{y} + y = C \quad (\text{es decir, } x = Cy - y^2), \quad y \text{ además } y = 0.$$

7. (un factor no es único) Comprueba que $\frac{1}{x^2}$, $\frac{1}{y^2}$ y $\frac{1}{xy}$ son factores integrantes de $y dx - x dy = 0$. Resuelve la ecuación con cada uno, explica por qué las tres respuestas describen la misma familia y di qué solución pierde cada una.

Solución.

Paso 1. Las soluciones, a ojo. $y dx = x dy$ dice que $dy/dx = y/x$: la pendiente es la del radio. Son las rectas por el origen.

Paso 2. Cada factor.

$$\frac{y dx - x dy}{x^2} = -d\left(\frac{y}{x}\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad y = Cx \quad \text{pierde } x = 0$$

$$\frac{y dx - x dy}{y^2} = d\left(\frac{x}{y}\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad x = Cy \quad \text{pierde } y = 0$$

$$\frac{y dx - x dy}{xy} = \frac{1}{x} dx - \frac{1}{y} dy = 0 \quad \Rightarrow \quad \ln \left| \frac{x}{y} \right| = C \quad \text{pierde } x = 0 \text{ e } y = 0$$

Que cada uno es factor integrante se ve en la misma línea: el lado izquierdo es la diferencial de una función.

Paso 3. Por qué la misma familia. Dos factores integrantes de una ecuación difieren en un factor que es función de la solución: aquí $\frac{1/y^2}{1/x^2} = \left(\frac{x}{y}\right)^2$. Cambian la forma de escribir la familia, no la familia.

$$y = Cx \text{ junto con } x = 0: \text{ todas las rectas por el origen.}$$