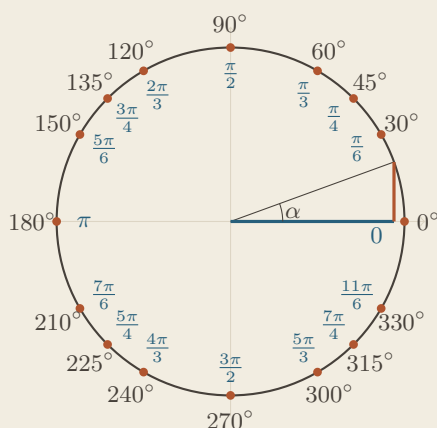


## Fórmulas trigonométricas

Identidades, ángulos notables y cómo usarlas · Grados de Ciencias, Ingeniería y Economía

### La circunferencia goniométrica

En la circunferencia de radio 1, el punto que forma un ángulo  $\alpha$  con el eje  $X$  tiene coordenadas  $(\cos \alpha, \sin \alpha)$ : el coseno se lee en horizontal y el seno en vertical.



**Coordenadas**  $(\cos, \sin)$ :

$$30^\circ: \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

$$45^\circ: \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$60^\circ: \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$0^\circ: (1, 0), 90^\circ: (0, 1)$$

$$180^\circ: (-1, 0), 270^\circ: (0, -1)$$

El resto: las cifras de su ángulo del primer cuadrante, con el signo del cuadrante. Grados por fuera, **radia-**nes por dentro.

### Valores de los ángulos notables

|     | 0 | $\frac{\pi}{6} = 30^\circ$ | $\frac{\pi}{4} = 45^\circ$ | $\frac{\pi}{3} = 60^\circ$ | $\frac{\pi}{2} = 90^\circ$ |
|-----|---|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| sen | 0 | $\frac{1}{2}$              | $\frac{\sqrt{2}}{2}$       | $\frac{\sqrt{3}}{2}$       | 1                          |
| cos | 1 | $\frac{\sqrt{3}}{2}$       | $\frac{\sqrt{2}}{2}$       | $\frac{1}{2}$              | 0                          |
| tg  | 0 | $\frac{\sqrt{3}}{3}$       | 1                          | $\sqrt{3}$                 | no existe                  |

| Cuadr. | sen | cos | tg |
|--------|-----|-----|----|
| I      | +   | +   | +  |
| II     | +   | -   | -  |
| III    | -   | -   | +  |
| IV     | -   | +   | -  |

Truco para el seno:  $\frac{\sqrt{0}}{2}, \frac{\sqrt{1}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{4}}{2}$ ; el coseno es la misma lista al revés. **Otros cuadrantes:** las cifras del ángulo del primer cuadrante que le corresponde y el signo del cuadrante. Por ejemplo,  $150^\circ = 180^\circ - 30^\circ$ :  $\sin 150^\circ = \sin 30^\circ = \frac{1}{2}$  y  $\cos 150^\circ = -\cos 30^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ .

| Relación                                  | sen            | cos            | tg             |
|-------------------------------------------|----------------|----------------|----------------|
| Suplementarios: $\pi - \alpha$            | $\sin \alpha$  | $-\cos \alpha$ | $-\tan \alpha$ |
| Diferen en $\pi$ : $\pi + \alpha$         | $-\sin \alpha$ | $-\cos \alpha$ | $\tan \alpha$  |
| Opuestos: $-\alpha$                       | $-\sin \alpha$ | $\cos \alpha$  | $-\tan \alpha$ |
| Complementarios: $\frac{\pi}{2} - \alpha$ | $\cos \alpha$  | $\sin \alpha$  | $\cotg \alpha$ |

## Identidades

| Familia                     | Fórmula                                                                                                                                                                                                                                              |
|-----------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Fundamental                 | $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$                                                                                                                                                                                                                            |
| Dividiendo entre $\cos^2 x$ | $1 + \operatorname{tg}^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x$                                                                                                                                                                                          |
| Dividiendo entre $\sin^2 x$ | $1 + \operatorname{cotg}^2 x = \frac{1}{\sin^2 x} = \operatorname{cosec}^2 x$                                                                                                                                                                        |
| Definiciones                | $\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}, \quad \operatorname{cotg} x = \frac{\cos x}{\sin x} = \frac{1}{\operatorname{tg} x}$<br>$\sec x = \frac{1}{\cos x}, \quad \operatorname{cosec} x = \frac{1}{\sin x}$                                   |
| Suma y resta                | $\sin(a \pm b) = \sin a \cos b \pm \cos a \sin b$<br>$\cos(a \pm b) = \cos a \cos b \mp \sin a \sin b$<br>$\operatorname{tg}(a \pm b) = \frac{\operatorname{tg} a \pm \operatorname{tg} b}{1 \mp \operatorname{tg} a \operatorname{tg} b}$           |
| Ángulo doble                | $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$<br>$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 2 \cos^2 x - 1 = 1 - 2 \sin^2 x$<br>$\operatorname{tg} 2x = \frac{2 \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg}^2 x}$                                                                 |
| Ángulo mitad                | $\sin \frac{x}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos x}{2}}, \quad \cos \frac{x}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos x}{2}}$<br>$\operatorname{tg} \frac{x}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos x}{1 + \cos x}} = \frac{\sin x}{1 + \cos x} = \frac{1 - \cos x}{\sin x}$ |
| Reducción de potencias      | $\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}, \quad \sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$                                                                                                                                                                           |

En el ángulo mitad, el signo  $\pm$  lo decide el cuadrante de  $\frac{x}{2}$ . La reducción de potencias es la misma fórmula leída al revés, y es la que se usa para integrar  $\sin^2 x$  y  $\cos^2 x$ .

| Sumas a productos                                            | Productos a sumas                                 |
|--------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------|
| $\sin A + \sin B = 2 \sin \frac{A+B}{2} \cos \frac{A-B}{2}$  | $\sin a \sin b = \frac{\cos(a-b) - \cos(a+b)}{2}$ |
| $\sin A - \sin B = 2 \cos \frac{A+B}{2} \sin \frac{A-B}{2}$  | $\cos a \cos b = \frac{\cos(a-b) + \cos(a+b)}{2}$ |
| $\cos A + \cos B = 2 \cos \frac{A+B}{2} \cos \frac{A-B}{2}$  | $\sin a \cos b = \frac{\sin(a+b) + \sin(a-b)}{2}$ |
| $\cos A - \cos B = -2 \sin \frac{A+B}{2} \sin \frac{A-B}{2}$ |                                                   |

## Funciones inversas y triángulos

Cada inversa devuelve *un solo* ángulo, el de su recorrido; las demás soluciones salen de la circunferencia. En un triángulo cualquiera, de lados  $a, b, c$  opuestos a los ángulos  $A, B, C$ : el teorema del

seno sirve con dos ángulos y un lado; el del coseno, con tres lados o con dos y el ángulo entre ellos (con  $A = 90^\circ$  es Pitágoras).

| Función     | Dominio      | Recorrido                         |
|-------------|--------------|-----------------------------------|
| $\arcsen x$ | $[-1, 1]$    | $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ |
| $\arccos x$ | $[-1, 1]$    | $[0, \pi]$                        |
| $\arctg x$  | $\mathbb{R}$ | $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ |

| Teorema    | Fórmula                                                  |
|------------|----------------------------------------------------------|
| Del seno   | $\frac{a}{\sen A} = \frac{b}{\sen B} = \frac{c}{\sen C}$ |
| Del coseno | $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$                           |

Ejemplos:  $\arcsen \frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}$ ,  $\arccos(-\frac{1}{2}) = \frac{2\pi}{3}$ ,  $\arctg(-1) = -\frac{\pi}{4}$ .

## Ejemplos de uso

**1. Simplificar.** Fundamental arriba, definición de tangente al final:

$$\frac{1 - \cos^2 x}{\sen x \cos x} = \frac{\sen^2 x}{\sen x \cos x} = \frac{\sen x}{\cos x} = \tg x.$$

**2. Calcular**  $\sen 75^\circ$ . Se parte en ángulos notables,  $75^\circ = 45^\circ + 30^\circ$ :

$$\sen 75^\circ = \sen 45^\circ \cos 30^\circ + \cos 45^\circ \sen 30^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}.$$

**3. Linealizar para integrar.** Reducción de potencias:

$$\int \sen^2 x \, dx = \int \frac{1 - \cos 2x}{2} \, dx = \frac{x}{2} - \frac{\sen 2x}{4} + C.$$

**4. Ecuación.**  $2 \sen x = 1$  en  $[0, 2\pi)$ :  $\sen x = \frac{1}{2}$ . La calculadora da  $\arcsen \frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}$ , y el suplementario tiene el mismo seno:

$$x = \frac{\pi}{6} \quad \text{o} \quad x = \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}.$$

**Errores típicos.**  $\sen(a + b) \neq \sen a + \sen b$ : con  $a = b = \frac{\pi}{4}$  sale 1 a la izquierda y  $\sqrt{2}$  a la derecha; se usa la fórmula de la suma.  $\sen 2x \neq 2 \sen x$ : es  $2 \sen x \cos x$ . La calculadora en grados o en radianes según el enunciado: en Cálculo, casi siempre radianes ( $\sen 30$  en radianes es  $-0,988\dots$ , no  $\frac{1}{2}$ ).  $\sen^{-1} x$  es  $\arcsen x$ , la inversa, no  $\frac{1}{\sen x}$ ; en cambio  $\sen^2 x = (\sen x)^2$ . Y  $\arcsen$  devuelve una sola solución: falta buscar las demás en la circunferencia.