

Integrales: cambio de variable y por partes — Resolución detallada

Inmediatas compuestas, partes y cambio de variable: qué usar y cómo

Grados de Ciencias, Ingeniería y Economía

1. Dos ejemplos para empezar

Ejemplo 1: inmediata compuesta

$$\int 3x^2 (x^3 + 1)^4 dx.$$

Paso 1. La tabla, con x . Una potencia cuarta:

$$\int x^4 dx = \frac{x^5}{5} + C.$$

Paso 2. En lugar de x , $x^3 + 1$; fuera, su derivada $3x^2$.

$$\int (x^3 + 1)^4 \underbrace{3x^2}_{\text{derivada de } x^3 + 1} dx.$$

Paso 3. Se integra igual que con x ; la derivada de fuera desaparece.

$$\begin{aligned} \int x^4 dx &= \frac{x^5}{5} \\ \int (x^3 + 1)^4 3x^2 dx &= \frac{(x^3 + 1)^5}{5} \end{aligned}$$

$$\int 3x^2 (x^3 + 1)^4 dx = \frac{(x^3 + 1)^5}{5} + C.$$

Paso 4. Comprobamos derivando. $(\frac{1}{5}(x^3 + 1)^5)' = (x^3 + 1)^4 \cdot 3x^2.$

Ejemplo 2: por partes

$$\int x \cos x dx.$$

Paso 1. ¿Tabla? No: x no es la derivada de $\cos x$.

Paso 2. ¿Cuál se simplifica al derivar? $x \rightarrow 1$. Queremos la prima sobre la x .

Paso 3. Primero, la prima en la otra. $\cos x = (\sin x)'$:

$$\int x \cos x \, dx = \int x (\sin x)' \, dx.$$

Paso 4. Copiamos las dos sin prima; misma integral, prima cambiada de sitio.

$$\begin{aligned} \int x (\sin x)' \, dx &= \underbrace{x \sin x}_{\text{sin prima}} - \int (x)' \sin x \, dx \\ &= x \sin x - \int \sin x \, dx = x \sin x + \cos x + C. \end{aligned}$$

$$\int x \cos x \, dx = x \sin x + \cos x + C.$$

Paso 5. Comprobamos derivando. $(x \sin x + \cos x)' = \sin x + x \cos x - \sin x = x \cos x$.

2. El método, resumido

Ante $\int f(x) \, dx$, pregúntate por orden:

1. **¿Se puede simplificar?** Reparte, separa fracciones, propiedades de potencias y logaritmos.
2. **¿Está en la tabla con x , o con f en su lugar y f' fuera?** $\rightarrow$ inmediata. ¿Falta o sobra una constante? Se ajusta.
3. **¿Un producto con una función que se simplifica al derivar?** $\rightarrow$ partes: prima en la otra, y $\int f g' \, dx = f g - \int f' g \, dx$.
4. **¿Una raíz o un paréntesis que estorba, sin su derivada fuera?** $\rightarrow$ cambio: $t =$ lo que estorba; despeja x y dx .
5. **¿Ha vuelto la integral?** $\rightarrow$ despégala.
6. **¿Has comprobado derivando? ¿Y la $+C$?**

3. Integrales inmediatas

Cada fila es una derivada leída al revés.

con x

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \quad (n \neq -1)$$

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln |x| + C$$

$$\int e^x dx = e^x + C$$

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$$

$$\int \cos x dx = \operatorname{sen} x + C$$

$$\int \operatorname{sen} x dx = -\cos x + C$$

$$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \operatorname{tg} x + C$$

$$\int \frac{1}{1+x^2} dx = \operatorname{arctg} x + C$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \operatorname{arcsen} x + C$$

con f en lugar de x , y f' fuera

$$\int f^n f' dx = \frac{f^{n+1}}{n+1} + C$$

$$\int \frac{f'}{f} dx = \ln |f| + C$$

$$\int e^f f' dx = e^f + C$$

$$\int a^f f' dx = \frac{a^f}{\ln a} + C$$

$$\int \cos f \cdot f' dx = \operatorname{sen} f + C$$

$$\int \operatorname{sen} f \cdot f' dx = -\cos f + C$$

$$\int \frac{f'}{\cos^2 f} dx = \operatorname{tg} f + C$$

$$\int \frac{f'}{1+f^2} dx = \operatorname{arctg} f + C$$

$$\int \frac{f'}{\sqrt{1-f^2}} dx = \operatorname{arcsen} f + C$$

Ejemplo. $\int \frac{\ln x}{x} dx$:

$$\begin{aligned} \int x dx &= \frac{x^2}{2} \\ \int \underbrace{\ln x \cdot \frac{1}{x}}_{\text{derivada de } \ln x} dx &= \frac{(\ln x)^2}{2} + C \end{aligned}$$

Ejemplo. $\int \operatorname{tg} x dx = \int \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} dx$, del tipo $\int \frac{f'}{f} dx$:

$$\int \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} dx = - \int \overbrace{\frac{-\operatorname{sen} x}{\cos x}}^{\text{derivada de } \cos x} dx = -\ln |\cos x| + C.$$

Ajustar constantes: falta un 3, sobra un 3

Falta: se pone dentro y se divide fuera.

$$\int x^2 e^{x^3} dx = \frac{1}{3} \int e^{x^3} \underbrace{3x^2}_{\text{falta el 3}} dx = \frac{1}{3} e^{x^3} + C.$$

Sobra: se saca fuera.

$$\int 6x (x^2 + 1)^3 dx = 3 \int (\underbrace{x^2 + 1}_{6x = 3 \cdot 2x})^3 \underbrace{2x}_{\text{se saca fuera}} dx = \frac{3}{4} (x^2 + 1)^4 + C.$$

Solo se ajustan *constantes*. En $\int e^{x^2} dx$ falta $2x$, que no es constante: no se puede «multiplicar y dividir por $2x$ ». Esa integral no tiene primitiva elemental.

$\int \frac{1}{x} dx = \ln |x| + C$, con valor absoluto: $\frac{1}{x}$ existe para $x < 0$ y $\ln x$ no. Se quita si lo de dentro es siempre positivo, como en $\ln(x^2 + 1)$.

4. Integración por partes

4.1. La regla de la prima

Algunas funciones se simplifican al derivar:

$$x^n \rightarrow n x^{n-1}, \quad \ln x \rightarrow \frac{1}{x}, \quad \operatorname{arctg} x \rightarrow \frac{1}{1+x^2}.$$

Queremos la prima sobre esa. Para ello, *primero* la ponemos en la otra (la integramos), y entonces:

$$\int f g' dx = \underbrace{f g}_{\text{copia, sin prima}} - \underbrace{\int f' g dx}_{\text{misma integral, prima movida}}$$

Sale de $(f g)' = f' g + f g'$: se integra y se despeja $\int f g' dx$.

Ejemplo. $\int x e^x dx$, con $e^x = (e^x)'$:

$$\int \underbrace{x}_{\text{se simplifica}} (e^x)' dx = x e^x - \int (x)' e^x dx = x e^x - e^x + C.$$

El menos afecta a *toda* la integral nueva. Si la función integrada trae su signo ($\operatorname{sen} x = (-\cos x)'$), salen dos menos seguidos: escribe el paréntesis.

4.2. Una sola función: $\ln x$ y $\operatorname{arctg} x$

No están en la tabla, pero se simplifican al derivar. Se multiplican por $1 = (x)'$:

$$\int \ln x \cdot (x)' dx = x \ln x - \int (\ln x)' x dx = x \ln x - \int \frac{1}{x} \cdot x dx = x \ln x - x + C.$$

$$\begin{aligned}\int \operatorname{arctg} x \cdot (x)' dx &= x \operatorname{arctg} x - \int \frac{x}{1+x^2} dx \\ &= x \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} \int \frac{\overbrace{2x}^{\text{falta el } 2}}{1+x^2} dx = x \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} \ln(1+x^2) + C.\end{aligned}$$

4.3. Partes repetidas

Polinomio de grado n por exponencial, seno o coseno: la regla n veces, prima siempre en la exponencial o la trigonométrica; el polinomio baja un grado cada vez.

Ejemplo. $\int x^2 e^x dx$.

$$\begin{aligned}\int x^2 (e^x)' dx &= x^2 e^x - \int 2x e^x dx, \\ \int 2x (e^x)' dx &= 2x e^x - \int 2 e^x dx = 2x e^x - 2e^x, \\ \int x^2 e^x dx &= x^2 e^x - (2x e^x - 2e^x) + C = e^x(x^2 - 2x + 2) + C.\end{aligned}$$

Comprobación: $(e^x(x^2 - 2x + 2))' = e^x(x^2 - 2x + 2) + e^x(2x - 2) = x^2 e^x$.

4.4. Integrales que vuelven a aparecer

Exponencial por seno o coseno: ninguna se simplifica. Tras dos veces vuelve la integral de partida, y se *despeja*.

Ejemplo. $I = \int e^x \cos x dx$, prima en la exponencial:

$$\begin{aligned}I &= \int \cos x (e^x)' dx = e^x \cos x - \int (\cos x)' e^x dx = e^x \cos x + \int \operatorname{sen} x e^x dx, \\ \int \operatorname{sen} x (e^x)' dx &= e^x \operatorname{sen} x - \int \cos x e^x dx = e^x \operatorname{sen} x - \underbrace{I}_{\text{vuelve}}.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}I &= e^x \cos x + e^x \operatorname{sen} x - I \\ 2I &= e^x(\cos x + \operatorname{sen} x) \\ I &= \frac{e^x(\operatorname{sen} x + \cos x)}{2} + C.\end{aligned}$$

En la segunda vuelta, la prima en la *misma* función que en la primera. Si la cambias, se deshace lo hecho y sale $I = I$.

La $+C$ va al final, después de despejar.

5. Cambio de variable

5.1. Cuándo aporta algo

Si es inmediata compuesta, basta la tabla. El cambio sirve cuando algo estorba (una raíz, un paréntesis elevado) y su derivada *no* está fuera:

1. $t =$ lo que estorba; despeja x en función de t .
2. $dx = x'(t) dt$.
3. Sustituye (ni una x ni un dx), integra en t y deshaz el cambio.

Ejemplo. $\int x\sqrt{x+1} dx$. La derivada de $x+1$ es 1, pero sobra una x , que no es constante: no es inmediata.

$$\begin{aligned} t = x + 1 &\implies x = t - 1, \quad dx = dt, \\ \int x\sqrt{x+1} dx &= \int (t-1)t^{1/2} dt = \int (t^{3/2} - t^{1/2}) dt \\ &= \frac{2}{5}t^{5/2} - \frac{2}{3}t^{3/2} + C = \frac{2}{5}(x+1)^{5/2} - \frac{2}{3}(x+1)^{3/2} + C. \end{aligned}$$

El cambio afecta a *todo*, también al diferencial: $\int (t-1)\sqrt{t} dx$ mezcla t y x y está mal.

5.2. Cambio en una integral definida

Se cambian también los límites: x de a a $b \implies t$ de $t(a)$ a $t(b)$, y no hace falta deshacer el cambio.

Ejemplo. $\int_0^3 \frac{x}{\sqrt{x+1}} dx$, con $t = \sqrt{x+1}$:

$$\begin{aligned} t = \sqrt{x+1} &\implies x = t^2 - 1, \quad dx = 2t dt, \\ x = 0 &\implies t = 1, \\ x = 3 &\implies t = 2, \\ \int_0^3 \frac{x}{\sqrt{x+1}} dx &= \int_1^2 \frac{t^2 - 1}{t} 2t dt = 2 \int_1^2 (t^2 - 1) dt = 2 \left[\frac{t^3}{3} - t \right]_1^2 \\ &= 2 \left(\frac{2}{3} + \frac{2}{3} \right) = \frac{8}{3}. \end{aligned}$$

O se cambian los límites, o se deshace el cambio antes de sustituir. Nunca límites de x en una primitiva escrita en t .

Las integrales racionales, trigonométricas e irracionales tienen técnicas propias. Son el tema del segundo documento de integrales.

6. Ejercicios

Niveles de dificultad

 Está en la tabla, o partes una sola vez con la prima clara.

 Ajustar una constante, aplicar Barrow, elegir dónde va la prima, la integral vuelve tras una sola vez, o un cambio que quita un paréntesis.

 Partes repetidas, la integral vuelve tras dos veces, o un cambio que quita una raíz.

 Combinar cambio y partes, o una que vuelve con constantes.

 1. (con x) Calcula $\int \left(3x^2 - \frac{4}{x} + e^x\right) dx$.

Solución.

Paso 1. Separamos y sacamos las constantes.

Paso 2. Cada término, por la tabla con x .

$$\int \left(3x^2 - \frac{4}{x} + e^x\right) dx = 3 \cdot \frac{x^3}{3} - 4 \ln |x| + e^x + C.$$

$$x^3 - 4 \ln |x| + e^x + C.$$

Paso 3. Comprobamos. $(x^3 - 4 \ln |x| + e^x)' = 3x^2 - \frac{4}{x} + e^x$.

 2. (la derivada a la vista) Calcula $\int 2x \cos(x^2) dx$.

Solución.

Paso 1. Con x . $\int \cos x dx = \sin x + C$.

Paso 2. Con x^2 en lugar de x .

$$\int \cos(x^2) \underbrace{2x}_{\text{derivada de } x^2} dx = \sin(x^2) + C.$$

$$\sin(x^2) + C.$$

Paso 3. Comprobamos. $(\sin(x^2))' = \cos(x^2) \cdot 2x$.

 3. (falta un 2) Calcula $\int \frac{x}{x^2 + 1} dx$.

Solución.

Paso 1. Con x . Del tipo $\int \frac{1}{x} dx = \ln |x|$.

Paso 2. Ajustamos el 2.

$$\int \frac{x}{x^2 + 1} dx = \frac{1}{2} \int \overbrace{\frac{2x}{x^2 + 1}}^{\text{falta el 2}} dx = \frac{1}{2} \ln |x^2 + 1| + C.$$

Paso 3. Quitamos el valor absoluto. $x^2 + 1 > 0$.

$$\frac{1}{2} \ln(x^2 + 1) + C.$$

Paso 4. Comprobamos. $(\frac{1}{2} \ln(x^2 + 1))' = \frac{1}{2} \cdot \frac{2x}{x^2 + 1} = \frac{x}{x^2 + 1}$.

4. (¿partes o tabla?) Calcula $\int x e^{x^2} dx$.

Solución.

Paso 1. ¿Tabla? Sí: e^{x^2} y fuera x , la derivada de x^2 salvo un 2. No hacen falta partes.

Paso 2. Ajustamos el 2.

$$\int x e^{x^2} dx = \frac{1}{2} \int e^{x^2} \underbrace{2x}_{\text{falta el 2}} dx = \frac{1}{2} e^{x^2} + C.$$

$$\frac{1}{2} e^{x^2} + C.$$

Paso 3. Comprobamos. $(\frac{1}{2} e^{x^2})' = \frac{1}{2} e^{x^2} \cdot 2x = x e^{x^2}$.

5. (una raíz en el exponente) Calcula $\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx$.

Solución.

Paso 1. Con x . $\int e^x dx = e^x + C$.

Paso 2. Con $\sqrt{x}$ en lugar de x . Su derivada es $\frac{1}{2\sqrt{x}}$; fuera está $\frac{1}{\sqrt{x}}$: sobra un 2.

$$\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx = 2 \int e^{\sqrt{x}} \underbrace{\frac{1}{2\sqrt{x}}}_{\text{derivada de } \sqrt{x}} dx = 2e^{\sqrt{x}} + C.$$

$$2e^{\sqrt{x}} + C.$$

Paso 3. Comprobamos. $(2e^{\sqrt{x}})' = 2e^{\sqrt{x}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}$.

6. (definida e inmediata) Calcula $\int_1^e \frac{(\ln x)^2}{x} dx$.

Solución.

Paso 1. Con x . $\int x^2 dx = \frac{x^3}{3}$.

Paso 2. Con $\ln x$ en lugar de x .

$$\int (\ln x)^2 \underbrace{\frac{1}{x}}_{\text{derivada de } \ln x} dx = \frac{(\ln x)^3}{3}.$$

Paso 3. Barrow.

$$\int_1^e \frac{(\ln x)^2}{x} dx = \left[\frac{(\ln x)^3}{3} \right]_1^e = \frac{1^3}{3} - \frac{0^3}{3} = \frac{1}{3}.$$

$$\frac{1}{3}.$$

7. (partes una vez) Calcula $\int x \sen x dx$.

Solución.

Paso 1. Prima en la otra. Se simplifica x ; $\sen x = (-\cos x)'$.

Paso 2. Copiamos y movemos la prima.

$$\begin{aligned} \int x (-\cos x)' dx &= -x \cos x - \int (x)' (-\cos x) dx \\ &= -x \cos x + \int \cos x dx = -x \cos x + \sen x + C. \end{aligned}$$

$$-x \cos x + \sen x + C.$$

Paso 3. Comprobamos. $(-x \cos x + \sen x)' = -\cos x + x \sen x + \cos x = x \sen x$.

8. (integrar la otra con una constante) Calcula $\int x e^{2x} dx$.

Solución.

Paso 1. Integramos la otra. Se simplifica x ; la prima va a e^{2x} , que es inmediata compuesta con un 2 que falta:

$$\int e^{2x} dx = \frac{1}{2} \int e^{\underbrace{2x}_\text{falta el 2}} dx = \frac{1}{2} e^{2x} \implies e^{2x} = \left(\frac{1}{2} e^{2x} \right)'.$$

Paso 2. Copiamos y movemos la prima.

$$\int x \left(\frac{1}{2} e^{2x} \right)' dx = \frac{x}{2} e^{2x} - \int (x)' \frac{1}{2} e^{2x} dx = \frac{x}{2} e^{2x} - \frac{1}{4} e^{2x} + C.$$

$$e^{2x} \left(\frac{x}{2} - \frac{1}{4} \right) + C.$$

Paso 3. Comprobamos. $\left(e^{2x}\left(\frac{x}{2} - \frac{1}{4}\right)\right)' = 2e^{2x}\left(\frac{x}{2} - \frac{1}{4}\right) + \frac{1}{2}e^{2x} = x e^{2x}.$

9. (con logaritmo) Calcula $\int x \ln x \, dx.$

Solución.

Paso 1. Prima en la otra. Aquí se simplifica $\ln x \rightarrow \frac{1}{x}$ (y no sabemos integrarlo). La prima va a la x : $x = \left(\frac{x^2}{2}\right)'$.

Paso 2. Copiamos y movemos la prima.

$$\begin{aligned}\int \ln x \left(\frac{x^2}{2}\right)' dx &= \frac{x^2}{2} \ln x - \int (\ln x)' \frac{x^2}{2} dx \\ &= \frac{x^2}{2} \ln x - \int \frac{1}{x} \cdot \frac{x^2}{2} dx = \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{x^2}{4} + C.\end{aligned}$$

$$\frac{x^2}{2} \ln x - \frac{x^2}{4} + C.$$

Paso 3. Comprobamos. $\left(\frac{x^2}{2} \ln x - \frac{x^2}{4}\right)' = x \ln x + \frac{x}{2} - \frac{x}{2} = x \ln x.$

10. (partes dos veces) Calcula $\int x^2 \sin x \, dx.$

Solución.

Paso 1. Primera vez. x^2 se simplifica; $\sin x = (-\cos x)'$.

$$\int x^2 (-\cos x)' dx = -x^2 \cos x - \int 2x (-\cos x) dx = -x^2 \cos x + \int 2x \cos x \, dx.$$

Paso 2. Segunda vez. $2x$ baja otra vez; $\cos x = (\sin x)'$.

$$\int 2x (\sin x)' dx = 2x \sin x - \int 2 \sin x \, dx = 2x \sin x + 2 \cos x.$$

Paso 3. Juntamos.

$$-x^2 \cos x + 2x \sin x + 2 \cos x + C.$$

Paso 4. Comprobamos.

$$\begin{aligned}(-x^2 \cos x + 2x \sin x + 2 \cos x)' &= -2x \cos x + x^2 \sin x + 2 \sin x + 2x \cos x - 2 \sin x \\ &= x^2 \sin x.\end{aligned}$$

11. (partes tres veces) Calcula $\int x^3 e^x \, dx.$

Solución.

Paso 1. Tres veces, prima siempre en la exponencial.

$$\begin{aligned}\int x^3 (e^x)' dx &= x^3 e^x - \int 3x^2 e^x dx, \\ \int 3x^2 (e^x)' dx &= 3x^2 e^x - \int 6x e^x dx, \\ \int 6x (e^x)' dx &= 6x e^x - \int 6e^x dx = 6x e^x - 6e^x.\end{aligned}$$

Paso 2. Juntamos de abajo arriba. Cada menos afecta a todo lo que sigue:

$$\begin{aligned}\int x^3 e^x dx &= x^3 e^x - (3x^2 e^x - (6x e^x - 6e^x)) + C \\ &= x^3 e^x - 3x^2 e^x + 6x e^x - 6e^x + C.\end{aligned}$$

$e^x(x^3 - 3x^2 + 6x - 6) + C.$

Paso 3. Comprobamos.

$$\begin{aligned}(e^x(x^3 - 3x^2 + 6x - 6))' &= e^x(x^3 - 3x^2 + 6x - 6) + e^x(3x^2 - 6x + 6) \\ &= x^3 e^x.\end{aligned}$$

12. (vuelve tras una vez) Calcula $\int \cos^2 x dx$ por partes.

Solución.

Paso 1. Partes. $I = \int \cos x \cdot \cos x dx$. Prima en uno de los cosenos: $\cos x = (\sin x)'$.

$$I = \int \cos x (\sin x)' dx = \sin x \cos x - \int (\cos x)' \sin x dx = \sin x \cos x + \int \sin^2 x dx.$$

Paso 2. $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$, y vuelve I .

$$\int \sin^2 x dx = \int (1 - \cos^2 x) dx = x - \underbrace{\int \cos^2 x dx}_\text{vuelve}.$$

Paso 3. Despejamos.

$$\begin{aligned}I &= \sin x \cos x + x - I \\ 2I &= x + \sin x \cos x \\ I &= \frac{x + \sin x \cos x}{2}.\end{aligned}$$

$$\frac{x + \operatorname{sen} x \cos x}{2} + C.$$

Paso 4. Comprobamos. $\left(\frac{x + \operatorname{sen} x \cos x}{2}\right)' = \frac{1 + \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x}{2} = \frac{2 \cos^2 x}{2} = \cos^2 x.$

13. (la integral vuelve) Calcula $\int e^x \operatorname{sen} x \, dx.$

Solución.

Paso 1. Primera vez. Prima en la exponencial:

$$I = \int \operatorname{sen} x (e^x)' \, dx = e^x \operatorname{sen} x - \int \cos x e^x \, dx.$$

Paso 2. Segunda vez, prima otra vez en la exponencial.

$$\int \cos x (e^x)' \, dx = e^x \cos x - \int (-\operatorname{sen} x) e^x \, dx = e^x \cos x + \underbrace{\int e^x \operatorname{sen} x \, dx}_{\text{vuelve}}.$$

Paso 3. Sustituimos y despejamos. Cuidado con el paréntesis:

$$\begin{aligned} I &= e^x \operatorname{sen} x - (e^x \cos x + I) \\ 2I &= e^x (\operatorname{sen} x - \cos x) \\ I &= \frac{e^x (\operatorname{sen} x - \cos x)}{2}. \end{aligned}$$

$$\frac{e^x (\operatorname{sen} x - \cos x)}{2} + C.$$

Paso 4. Comprobamos.

$$\left(\frac{e^x (\operatorname{sen} x - \cos x)}{2}\right)' = \frac{e^x (\operatorname{sen} x - \cos x) + e^x (\cos x + \operatorname{sen} x)}{2} = e^x \operatorname{sen} x.$$

14. (vuelve, con constantes) Calcula $\int e^{2x} \cos 3x \, dx.$

Solución.

Paso 1. Primera vez. Prima en la exponencial, $e^{2x} = (\frac{1}{2}e^{2x})'$; al derivar $\cos 3x$ sale un 3:

$$\begin{aligned} I &= \int \cos 3x \left(\frac{1}{2}e^{2x}\right)' \, dx = \frac{1}{2}e^{2x} \cos 3x - \int (-3 \operatorname{sen} 3x) \frac{1}{2}e^{2x} \, dx \\ &= \frac{1}{2}e^{2x} \cos 3x + \frac{3}{2} \int e^{2x} \operatorname{sen} 3x \, dx. \end{aligned}$$

Paso 2. Segunda vez, prima otra vez en la exponencial.

$$\int \sin 3x \left(\frac{1}{2}e^{2x}\right)' dx = \frac{1}{2}e^{2x} \sin 3x - \int 3 \cos 3x \frac{1}{2}e^{2x} dx = \frac{1}{2}e^{2x} \sin 3x - \frac{3}{2} I.$$

Paso 3. Sustituimos y despejamos.

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{2}e^{2x} \cos 3x + \frac{3}{2} \left(\frac{1}{2}e^{2x} \sin 3x - \frac{3}{2} I \right) \\ I &= \frac{1}{2}e^{2x} \cos 3x + \frac{3}{4}e^{2x} \sin 3x - \frac{9}{4} I \\ \frac{13}{4} I &= \frac{1}{4}e^{2x} (2 \cos 3x + 3 \sin 3x) \\ I &= \frac{e^{2x} (2 \cos 3x + 3 \sin 3x)}{13}. \end{aligned}$$

$$\frac{e^{2x} (2 \cos 3x + 3 \sin 3x)}{13} + C.$$

Paso 4. Comprobamos.

$$\begin{aligned} \left(e^{2x} (2 \cos 3x + 3 \sin 3x) \right)' &= 2e^{2x} (2 \cos 3x + 3 \sin 3x) + e^{2x} (-6 \sin 3x + 9 \cos 3x) \\ &= 13 e^{2x} \cos 3x, \end{aligned}$$

y al dividir entre 13 queda el integrando.

15. (un paréntesis que estorba) Calcula $\int x(x+3)^4 dx$.

Solución.

Paso 1. ¿Tabla? La derivada de $x+3$ es 1, pero sobra una x , que no es constante. Desarrollar la potencia es largo: cambio.

Paso 2. Cambio y despeje.

$$t = x + 3 \implies x = t - 3, \quad dx = dt.$$

Paso 3. Sustituimos y repartimos.

$$\int x(x+3)^4 dx = \int (t-3)t^4 dt = \int (t^5 - 3t^4) dt = \frac{t^6}{6} - \frac{3}{5}t^5 + C.$$

Paso 4. Deshacemos el cambio.

$$\frac{(x+3)^6}{6} - \frac{3}{5}(x+3)^5 + C.$$

Paso 5. Comprobamos. $\left(\frac{1}{6}(x+3)^6 - \frac{3}{5}(x+3)^5 \right)' = (x+3)^5 - 3(x+3)^4 = (x+3)^4 x.$

16. (*quitar una raíz*) Calcula $\int x\sqrt{2x+1} dx$.

Solución.

Paso 1. Cambio y despeje. Como $\int x\sqrt{x+1} dx$, pero al despejar sale un $\frac{1}{2}$:

$$t = 2x + 1 \implies x = \frac{t-1}{2}, \quad dx = \frac{1}{2} dt.$$

Paso 2. Sustituimos y repartimos.

$$\begin{aligned} \int x\sqrt{2x+1} dx &= \int \frac{t-1}{2} t^{1/2} \frac{1}{2} dt = \frac{1}{4} \int (t^{3/2} - t^{1/2}) dt \\ &= \frac{1}{4} \left(\frac{2}{5} t^{5/2} - \frac{2}{3} t^{3/2} \right) + C = \frac{t^{5/2}}{10} - \frac{t^{3/2}}{6} + C. \end{aligned}$$

Paso 3. Deshacemos el cambio.

$$\frac{(2x+1)^{5/2}}{10} - \frac{(2x+1)^{3/2}}{6} + C.$$

Paso 4. Comprobamos.

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{10}(2x+1)^{5/2} - \frac{1}{6}(2x+1)^{3/2} \right)' &= \frac{1}{2}(2x+1)^{3/2} - \frac{1}{2}(2x+1)^{1/2} \\ &= \frac{1}{2}(2x+1)^{1/2} ((2x+1) - 1) = x\sqrt{2x+1}. \end{aligned}$$

17. (*definida con cambio*) Calcula $\int_0^4 \frac{1}{1+\sqrt{x}} dx$.

Solución.

Paso 1. Cambio y despeje. La raíz estorba y su derivada no está fuera.

$$t = \sqrt{x} \implies x = t^2, \quad dx = 2t dt.$$

Paso 2. Cambiamos los límites.

$$\begin{aligned} x = 0 &\implies t = 0, \\ x = 4 &\implies t = 2. \end{aligned}$$

Paso 3. Sustituimos. Sumamos y restamos 1 arriba: $\frac{t}{1+t} = \frac{(1+t)-1}{1+t} = 1 - \frac{1}{1+t}$.

$$\begin{aligned} \int_0^4 \frac{1}{1+\sqrt{x}} dx &= \int_0^2 \frac{2t}{1+t} dt = 2 \int_0^2 \left(1 - \frac{1}{1+t} \right) dt = 2 \left[t - \ln(1+t) \right]_0^2 \\ &= 2(2 - \ln 3) - 2(0 - \ln 1) = 4 - 2 \ln 3. \end{aligned}$$

$$4 - 2 \ln 3 \approx 1,803.$$

18. (cambio y después partes) Calcula $\int e^{\sqrt{x}} dx$.

Solución.

Paso 1. ¿Tabla? $e^{\sqrt{x}}$, pero sin $\frac{1}{2\sqrt{x}}$ fuera (en el ejercicio 5 sí estaba). Quitamos la raíz:

$$t = \sqrt{x} \implies x = t^2, \quad dx = 2t dt,$$

$$\int e^{\sqrt{x}} dx = \int 2t e^t dt.$$

Paso 2. Partes en t . Se simplifica $2t$; prima en la exponencial:

$$\int 2t (e^t)' dt = 2t e^t - \int 2 e^t dt = 2e^t(t - 1) + C.$$

Paso 3. Deshacemos el cambio.

$$2e^{\sqrt{x}}(\sqrt{x} - 1) + C.$$

Paso 4. Comprobamos.

$$\begin{aligned} \left(2e^{\sqrt{x}}(\sqrt{x} - 1)\right)' &= 2e^{\sqrt{x}} \frac{1}{2\sqrt{x}} (\sqrt{x} - 1) + 2e^{\sqrt{x}} \frac{1}{2\sqrt{x}} \\ &= \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} (\sqrt{x} - 1 + 1) = e^{\sqrt{x}}. \end{aligned}$$