

Recurrencias lineales — Resolución detallada

De la ecuación característica a la fórmula cerrada

Grados de Matemáticas, Informática e Ingeniería

1. Dos ejemplos para empezar

Ejemplo 1: una recurrencia homogénea

Queremos una fórmula para la sucesión

$$a_n = 5a_{n-1} - 6a_{n-2}, \quad a_0 = 1, \quad a_1 = 4.$$

Calculando a mano salen $1, 4, 14, 46, \dots$, pero queremos a_{100} sin calcular los 99 anteriores.

Paso 1. Probamos con una potencia. Buscamos soluciones de la forma $a_n = r^n$. Sustituyendo y dividiendo entre r^{n-2} :

$$\begin{aligned} r^n &= 5r^{n-1} - 6r^{n-2} \\ r^2 &= 5r - 6 \\ r^2 - 5r + 6 &= 0. \end{aligned}$$

Esta es la *ecuación característica*.

Paso 2. Sus raíces.

$$r^2 - 5r + 6 = (r - 2)(r - 3) = 0 \implies r = 2, r = 3.$$

Paso 3. La solución general. Tanto 2^n como 3^n cumplen la recurrencia, y también cualquier combinación de las dos:

$$a_n = A \cdot 2^n + B \cdot 3^n.$$

Paso 4. Las condiciones iniciales fijan A y B .

$$\begin{aligned} n = 0 : \quad A + B &= 1 \\ n = 1 : \quad 2A + 3B &= 4. \end{aligned}$$

Restando dos veces la primera a la segunda: $B = 2$, y entonces $A = -1$.

$$a_n = 2 \cdot 3^n - 2^n.$$

Paso 5. Comprobamos. Para $n = 2$: la recurrencia da $5 \cdot 4 - 6 \cdot 1 = 14$ y la fórmula, $2 \cdot 9 - 4 = 14$. Coinciden.

Ejemplo 2: una recurrencia no homogénea

Las Torres de Hanoi con n discos necesitan

$$a_n = 2a_{n-1} + 1, \quad a_0 = 0$$

movimientos. El «+1» hace que la recurrencia sea *no homogénea*.

Paso 1. Quitamos el término sobrante y resolvemos. La parte homogénea $a_n = 2a_{n-1}$ tiene ecuación característica $r = 2$, así que su solución es $A \cdot 2^n$.

Paso 2. Buscamos una solución particular. El término sobrante es una constante: probamos con una constante $a_n = C$.

$$C = 2C + 1$$

$$C = -1.$$

Paso 3. Sumamos las dos.

$$a_n = A \cdot 2^n - 1.$$

Paso 4. Ahora, y no antes, la condición inicial. $a_0 = A - 1 = 0$, así que $A = 1$.

$$a_n = 2^n - 1.$$

Paso 5. Comprobamos. $a_1 = 2 \cdot 0 + 1 = 1 = 2^1 - 1$ y $a_2 = 2 \cdot 1 + 1 = 3 = 2^2 - 1$.

Todo el tema son estos dos ejemplos: la ecuación característica da la parte homogénea, un tanteo da la particular, y las condiciones iniciales se aplican al final, a la suma.

2. El método, resumido

Cómo resolver $a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \dots + c_k a_{n-k} + f(n)$.

1. **Ecuación característica:** $r^k - c_1 r^{k-1} - \dots - c_k = 0$.
2. **Solución homogénea**, según las raíces:
 - raíz simple $r \rightarrow A r^n$;
 - raíz r de multiplicidad $m \rightarrow (A_0 + A_1 n + \dots + A_{m-1} n^{m-1}) r^n$;
 - par complejo $\rho e^{\pm i\theta} \rightarrow \rho^n (A \cos n\theta + B \sin n\theta)$.
3. **Solución particular** (si $f \neq 0$): tantear según la tabla de la sección 5, multiplicando por n^s si hay resonancia.
4. **General** = homogénea + particular.
5. **Condiciones iniciales**, sobre la general: un sistema lineal.
6. **Comprobar** con dos o tres términos calculados a mano.

3. Por qué funciona

La recurrencia homogénea es *lineal*: si dos sucesiones la cumplen, cualquier combinación $Ax_n + By_n$ también. Una recurrencia de orden k queda determinada por sus k primeros términos, así que sus soluciones forman un espacio de dimensión k : basta encontrar k soluciones independientes y combinarlas. Probar con r^n convierte la recurrencia en un polinomio, y cada raíz da una de esas soluciones.

Para la no homogénea: si p_n es una solución cualquiera y a_n es otra, su diferencia $a_n - p_n$ cumple la homogénea. Por eso toda solución es *una* particular más la homogénea general.

4. Las raíces de la ecuación característica

4.1. Raíces simples

Es el ejemplo 1: cada raíz r aporta un término $A r^n$.

4.2. Raíces múltiples

Si r es raíz doble, r^n solo da una solución y hacen falta dos. La segunda es $n r^n$; si es triple, también $n^2 r^n$, y así sucesivamente.

Ejemplo. $a_n = 4a_{n-1} - 4a_{n-2}$, $a_0 = 1$, $a_1 = 4$.

$$\begin{aligned} r^2 - 4r + 4 &= (r - 2)^2 = 0 & \text{raíz doble } r = 2 \\ a_n &= (A + Bn) 2^n. \end{aligned}$$

Condiciones iniciales:

$$\begin{aligned} n = 0 : & \quad A = 1 \\ n = 1 : & \quad (A + B) \cdot 2 = 4 \implies B = 1. \end{aligned}$$

$$a_n = (n + 1) 2^n.$$

Con una raíz doble, escribir $A 2^n + B 2^n$ es escribir $(A + B) 2^n$: una sola constante. El sistema de las condiciones iniciales sale incompatible, y esa es la señal de que falta el factor n .

4.3. Raíces complejas

Si los coeficientes son reales, las raíces complejas vienen en pares conjugados $\rho e^{\pm i\theta}$. Para trabajar solo con números reales se usa $\rho^n \cos n\theta$ y $\rho^n \sin n\theta$.

Ejemplo. $a_n = 2a_{n-1} - 2a_{n-2}$, $a_0 = 0$, $a_1 = 1$.

$$\begin{aligned} r^2 - 2r + 2 &= 0 \\ r &= \frac{2 \pm \sqrt{4 - 8}}{2} = 1 \pm i. \end{aligned}$$

En forma polar, $1 \pm i = \sqrt{2} e^{\pm i\pi/4}$: $\rho = \sqrt{2}$, $\theta = \pi/4$.

$$a_n = (\sqrt{2})^n \left(A \cos \frac{n\pi}{4} + B \sin \frac{n\pi}{4} \right).$$

Condiciones iniciales:

$$n = 0 : A = 0$$

$$n = 1 : \sqrt{2} \left(0 + B \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = B = 1.$$

$$a_n = 2^{n/2} \sin \frac{n\pi}{4}.$$

5. La solución particular

Se tantea una expresión de la misma forma que $f(n)$, con coeficientes desconocidos, y se sustituye en la recurrencia completa.

Si $f(n)$ es ...	se tantea ...
una constante	C
un polinomio de grado d	$C_0 + C_1 n + \dots + C_d n^d$
β^n	$C \beta^n$
un polinomio de grado d por β^n	$(C_0 + C_1 n + \dots + C_d n^d) \beta^n$

Una constante y un polinomio son el caso $\beta = 1$.

Resonancia. Si β es raíz de la ecuación característica con multiplicidad s , el tanteo de la tabla se multiplica por n^s .

Sin ese factor, el tanteo es solución de la homogénea: al sustituir da $0 = f(n)$, y no hay forma de ajustar los coeficientes.

Ejemplo con resonancia. $a_n = 3a_{n-1} + 3^n$, $a_0 = 1$.

La raíz característica es $r = 3$, y $f(n) = 3^n$ tiene $\beta = 3$: hay resonancia con $s = 1$. Se tantea $p_n = C n 3^n$:

$$\begin{aligned} C n 3^n &= 3 \cdot C (n-1) 3^{n-1} + 3^n \\ C n 3^n &= C (n-1) 3^n + 3^n && \text{dividimos entre } 3^n \\ C n &= C n - C + 1 \\ C &= 1. \end{aligned}$$

La general es $a_n = A \cdot 3^n + n 3^n$, y $a_0 = A = 1$.

$$a_n = (n+1) 3^n.$$

Ejemplo con un polinomio. $a_n = a_{n-1} + n$, $a_0 = 0$ (la suma $1 + 2 + \dots + n$).

La raíz característica es $r = 1$, y un polinomio tiene $\beta = 1$: resonancia con $s = 1$. El tanteo de grado 1 se multiplica por n : $p_n = n(Cn + D) = Cn^2 + Dn$.

$$\begin{aligned} Cn^2 + Dn &= C(n-1)^2 + D(n-1) + n \\ &= Cn^2 + (-2C + D + 1)n + (C - D). \end{aligned}$$

Igualando coeficientes:

$$\begin{aligned} n^1 : \quad D &= -2C + D + 1 \implies C = \frac{1}{2} \\ n^0 : \quad 0 &= C - D \implies D = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

La general es $a_n = A + \frac{1}{2}n(n+1)$, y $a_0 = A = 0$.

$$a_n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Las condiciones iniciales se aplican a la solución *general*, después de sumar la particular. Ajustarlas sobre la homogénea y sumar luego la particular da una sucesión que cumple la recurrencia pero no empieza donde debe.

Si la recurrencia viene como $a_{n+2} = c_1 a_{n+1} + c_2 a_n$, la ecuación característica es la misma: solo cambia el nombre del índice. Y si la sucesión empieza en a_1 , las condiciones son a_1 y a_2 , no a_0 y a_1 .

6. Ejercicios

Niveles de dificultad

- | | | | |
|---|--|---|--|
|  Homogénea: aplicar la receta. |  No homogénea sin resonancia, o plantear una recurrencia directa. |  Resonancia (tanteo por n^s), o plantear distinguiendo casos. |  Plantear con una restricción, y raíces irracionales. |
|---|--|---|--|

-  1. (*raíces simples*) Resuelve $a_n = a_{n-1} + 6a_{n-2}$, $a_0 = 3$, $a_1 = 4$.

Solución.

Paso 1. Ecuación característica.

$$\begin{aligned} r^2 - r - 6 &= 0 \\ (r-3)(r+2) &= 0 \implies r = 3, r = -2. \end{aligned}$$

Paso 2. Solución general. $a_n = A \cdot 3^n + B \cdot (-2)^n$.

Paso 3. Condiciones iniciales.

$$\begin{aligned} n = 0 : \quad A + B &= 3 \\ n = 1 : \quad 3A - 2B &= 4. \end{aligned}$$

Sustituyendo $B = 3 - A$ en la segunda: $3A - 6 + 2A = 4$, $A = 2$, $B = 1$.

Paso 4. Comprobación. $a_2 = 4 + 6 \cdot 3 = 22$ y $2 \cdot 9 + 4 = 22$.

$$a_n = 2 \cdot 3^n + (-2)^n.$$

2. (raíz doble) Resuelve $a_n = 6a_{n-1} - 9a_{n-2}$, $a_0 = 2$, $a_1 = 3$.

Solución.

Paso 1. Ecuación característica.

$$r^2 - 6r + 9 = (r - 3)^2 = 0 \implies r = 3 \text{ doble.}$$

Paso 2. Solución general. $a_n = (A + Bn) 3^n$.

Paso 3. Condiciones iniciales.

$$n = 0: A = 2$$

$$n = 1: (2 + B) \cdot 3 = 3 \implies B = -1.$$

Paso 4. Comprobación. $a_2 = 6 \cdot 3 - 9 \cdot 2 = 0$ y $(2 - 2) \cdot 9 = 0$.

$$a_n = (2 - n) 3^n.$$

3. (término exponencial) Resuelve $a_n = 5a_{n-1} - 6a_{n-2} + 4^n$, $a_0 = 9$, $a_1 = 35$.

Solución.

Paso 1. Homogénea. Es la del ejemplo 1: $r = 2$, $r = 3$, $h_n = A \cdot 2^n + B \cdot 3^n$.

Paso 2. Particular. $\beta = 4$ no es raíz: sin resonancia. Tanteamos $p_n = C \cdot 4^n$ y dividimos entre 4^{n-2} :

$$C \cdot 4^n = 5C \cdot 4^{n-1} - 6C \cdot 4^{n-2} + 4^n$$

$$16C = 20C - 6C + 16$$

$$2C = 16 \implies C = 8.$$

Paso 3. General. $a_n = A \cdot 2^n + B \cdot 3^n + 8 \cdot 4^n$.

Paso 4. Condiciones iniciales.

$$n = 0: A + B + 8 = 9$$

$$\implies A + B = 1$$

$$n = 1: 2A + 3B + 32 = 35$$

$$\implies 2A + 3B = 3.$$

Restando dos veces la primera: $B = 1$, $A = 0$.

Paso 5. Comprobación. $a_2 = 5 \cdot 35 - 6 \cdot 9 + 16 = 137$ y $9 + 8 \cdot 16 = 137$.

$$a_n = 3^n + 8 \cdot 4^n.$$

4. (término polinómico) Resuelve $a_n = 2a_{n-1} + n$, $a_0 = 1$.

Solución.

Paso 1. Homogénea. $r = 2$, $h_n = A \cdot 2^n$.

Paso 2. Particular. Polinomio de grado 1, y $\beta = 1$ no es raíz: tanteamos $p_n = Cn + D$.

$$\begin{aligned} Cn + D &= 2(C(n-1) + D) + n \\ &= (2C + 1)n + (-2C + 2D). \end{aligned}$$

Igualando coeficientes:

$$\begin{aligned} n^1: \quad C &= 2C + 1 & \implies C &= -1 \\ n^0: \quad D &= -2C + 2D & \implies D &= 2C = -2. \end{aligned}$$

Paso 3. General. $a_n = A \cdot 2^n - n - 2$.

Paso 4. Condición inicial. $a_0 = A - 2 = 1$, $A = 3$.

Paso 5. Comprobación. $a_1 = 2 + 1 = 3 = 6 - 1 - 2$ y $a_2 = 6 + 2 = 8 = 12 - 2 - 2$.

$$a_n = 3 \cdot 2^n - n - 2.$$

5. (plantear: una cuenta de ahorro) Una cuenta empieza vacía. Cada mes el banco paga un 1 % sobre el saldo y después se ingresan 100 €. Plantea una recurrencia para el saldo s_n tras n meses y resuélvela.

Solución.

Paso 1. Plantear. El saldo de un mes es el del anterior con los intereses, más el ingreso:

$$s_n = 1,01 s_{n-1} + 100, \quad s_0 = 0.$$

Paso 2. Homogénea. $r = 1,01$, $h_n = A \cdot 1,01^n$.

Paso 3. Particular. Término constante, y $\beta = 1$ no es raíz: $p_n = C$.

$$\begin{aligned} C &= 1,01 C + 100 \\ -0,01 C &= 100 \implies C = -10\,000. \end{aligned}$$

Paso 4. Condición inicial. $s_n = A \cdot 1,01^n - 10\,000$ y $s_0 = A - 10\,000 = 0$: $A = 10\,000$.

Paso 5. Comprobación. $s_1 = 100 = 10\,000 \cdot 0,01$ y $s_2 = 101 + 100 = 201 = 10\,000(1,0201 - 1)$.

$$s_n = 10\,000(1,01^n - 1) \text{ euros.}$$

6. (resonancia con raíz doble) Resuelve $a_n = 4a_{n-1} - 4a_{n-2} + 2^n$, $a_0 = 0$, $a_1 = 1$.

Solución.

Paso 1. Homogénea. $(r - 2)^2 = 0$, raíz doble: $h_n = (A + Bn) 2^n$.

Paso 2. Particular. $\beta = 2$ es raíz doble: resonancia con $s = 2$. Tanteamos $p_n = C n^2 2^n$ y dividimos entre 2^{n-2} :

$$\begin{aligned} C n^2 2^n &= 4C(n-1)^2 2^{n-1} - 4C(n-2)^2 2^{n-2} + 2^n \\ 4C n^2 &= 8C(n-1)^2 - 4C(n-2)^2 + 4 \\ &= 8C(n^2 - 2n + 1) - 4C(n^2 - 4n + 4) + 4 \\ &= 4C n^2 + 0 \cdot n - 8C + 4. \end{aligned}$$

Los términos en n^2 y en n se cancelan solos (es la resonancia bien tratada), y queda $0 = -8C + 4$: $C = \frac{1}{2}$. Entonces $p_n = n^2 2^{n-1}$.

Paso 3. General. $a_n = (A + Bn) 2^n + n^2 2^{n-1}$.

Paso 4. Condiciones iniciales.

$$\begin{aligned} n = 0 : \quad A &= 0 \\ n = 1 : \quad 2B + 1 &= 1 \implies B = 0. \end{aligned}$$

Paso 5. Comprobación. $a_2 = 4 - 0 + 4 = 8 = 4 \cdot 2$ y $a_3 = 32 - 4 + 8 = 36 = 9 \cdot 4$.

$$a_n = n^2 2^{n-1}.$$

7. (plantear: rectas en el plano) ¿En cuántas regiones dividen el plano n rectas si no hay dos paralelas ni tres que pasen por un mismo punto? Plantea una recurrencia para ese número r_n y resuélvela.

Solución.

Paso 1. Mirar qué hace la última recta. Con $n - 1$ rectas ya dibujadas, la recta n -ésima las corta a todas en $n - 1$ puntos distintos. Esos puntos la parten en n trozos, y cada trozo divide en dos una región que ya existía:

$$r_n = r_{n-1} + n, \quad r_0 = 1.$$

Paso 2. Homogénea. $r = 1$, $h_n = A$.

Paso 3. Particular. Polinomio de grado 1 con $\beta = 1$ raíz simple: resonancia, $p_n = n(Cn + D)$. Es el mismo cálculo que el ejemplo de la suma $1 + \dots + n$: $C = D = \frac{1}{2}$.

Paso 4. Condición inicial. $r_n = A + \frac{1}{2}n(n+1)$ y $r_0 = A = 1$.

Paso 5. Comprobación. Con 2 rectas, 4 regiones; con 3, 7: $1 + 3 = 4$ y $1 + 6 = 7$.

$$r_n = 1 + \frac{n(n+1)}{2}.$$

8. (plantear: dos casos al final) Un pasillo de $1 \times n$ se cubre con baldosas de 1×1 , que hay en 2 colores, y de 1×2 , que hay en 3 colores. ¿De cuántas formas t_n se puede cubrir?

Solución.

Paso 1. Plantear mirando la última baldosa.

- Si es de 1×1 : 2 colores, y delante queda un pasillo de longitud $n - 1$.
- Si es de 1×2 : 3 colores, y delante queda un pasillo de longitud $n - 2$.

Los dos casos no se solapan, así que se suman:

$$t_n = 2t_{n-1} + 3t_{n-2}, \quad t_0 = 1, \quad t_1 = 2.$$

($t_0 = 1$: el pasillo vacío se cubre de una forma, sin poner nada.)

Paso 2. Ecuación característica.

$$r^2 - 2r - 3 = (r - 3)(r + 1) = 0 \implies r = 3, r = -1.$$

Paso 3. Condiciones iniciales. Con $t_n = A \cdot 3^n + B \cdot (-1)^n$:

$$n = 0: A + B = 1$$

$$n = 1: 3A - B = 2.$$

Sumando: $4A = 3$, $A = \frac{3}{4}$, $B = \frac{1}{4}$.

Paso 4. Comprobación. $t_2 = 2 \cdot 2 + 3 \cdot 1 = 7$ (cuatro con dos baldosas pequeñas, tres con una grande) y $\frac{1}{4}(27 + 1) = 7$.

$$t_n = \frac{3^{n+1} + (-1)^n}{4}.$$

9. (plantear con una restricción) ¿Cuántas cadenas de n bits no tienen dos unos seguidos? Plantea una recurrencia para su número s_n y resuélvela.

Solución.

Paso 1. Plantear. Como en el pasillo, se mira el final. Una cadena válida de longitud n termina en 0 o en 1:

- si termina en 0, lo anterior es cualquier cadena válida de longitud $n - 1$;
- si termina en 1, el bit anterior tiene que ser 0, y lo de antes es cualquier cadena válida de longitud $n - 2$.

Así que $s_n = s_{n-1} + s_{n-2}$, con $s_1 = 2$ (0, 1) y $s_2 = 3$ (00, 01, 10). Para que las cuentas salgan más limpias, empezamos en $s_0 = 1$ (la cadena vacía): cumple $s_2 = s_1 + s_0$.

Paso 2. Ecuación característica.

$$r^2 - r - 1 = 0 \implies \varphi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}, \quad \psi = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}.$$

Paso 3. Condiciones iniciales. Con $s_n = A\varphi^n + B\psi^n$:

$$n = 0: A + B = 1$$

$$n = 1: A\varphi + B\psi = 2.$$

Sustituyendo $B = 1 - A$ y usando $\varphi - \psi = \sqrt{5}$:

$$A\sqrt{5} = 2 - \psi = \frac{3 + \sqrt{5}}{2} = \varphi^2 \quad \Rightarrow \quad A = \frac{\varphi^2}{\sqrt{5}}$$

$$B = 1 - A = \frac{\sqrt{5} - 3}{2\sqrt{5}} = -\frac{\psi^2}{\sqrt{5}}.$$

Paso 4. Comprobación. $s_1 = (\varphi^3 - \psi^3)/\sqrt{5} = 2$, y s_n es el número de Fibonacci F_{n+2} .

$$s_n = \frac{\varphi^{n+2} - \psi^{n+2}}{\sqrt{5}} = F_{n+2}.$$