

Desarrollos de Taylor e infinitésimos equivalentes

Los que hay que saber y cómo usarlos para calcular límites · Grados de Ciencias, Ingeniería y Economía

Desarrollos de Maclaurin (en $x = 0$)

$o(x^n)$ es «algo que va a 0 más deprisa que x^n »: $o(x^n)/x^n \rightarrow 0$ cuando $x \rightarrow 0$. Es lo que se tira al cortar el desarrollo.

Función	Primeros términos	Término general	Converge
e^x	$1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3)$	$\frac{x^n}{n!}$	$\mathbb{R}$
$\text{sen } x$	$x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o(x^6)$	$\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}$	$\mathbb{R}$
$\text{cos } x$	$1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^5)$	$\frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}$	$\mathbb{R}$
$\ln(1+x)$	$x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3)$	$\frac{(-1)^{n+1} x^n}{n}, n \geq 1$	$(-1, 1]$
$(1+x)^\alpha$	$1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2} x^2 + o(x^2)$	$\binom{\alpha}{n} x^n$	$ x < 1$
$\sqrt{1+x}$	$1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + o(x^2)$	$(\alpha = \frac{1}{2})$	$ x \leq 1$
$\frac{1}{1+x}$	$1 - x + x^2 - x^3 + o(x^3)$	$(-1)^n x^n$	$ x < 1$
$\text{arctg } x$	$x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + o(x^6)$	$\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}$	$[-1, 1]$
$\text{tg } x$	$x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + o(x^6)$	(no sencillo)	$ x < \frac{\pi}{2}$
$\text{arcsen } x$	$x + \frac{x^3}{6} + \frac{3x^5}{40} + o(x^6)$	$\frac{(2n)! x^{2n+1}}{4^n (n!)^2 (2n+1)}$	$[-1, 1]$
$\text{senh } x$	$x + \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o(x^6)$	$\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$	$\mathbb{R}$
$\text{cosh } x$	$1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^5)$	$\frac{x^{2n}}{(2n)!}$	$\mathbb{R}$

Los términos generales empiezan en $n = 0$ salvo que se diga otra cosa; $\binom{\alpha}{n} = \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}$.

Infinitésimos equivalentes cuando $x \rightarrow 0$

$f \sim g$ significa $\lim f/g = 1$: es quedarse con el primer término del desarrollo.

Infinitésimo	Equivale a	Infinitésimo	Equivale a
$\operatorname{sen} x$	x	$1 - \cos x$	$\frac{x^2}{2}$
$\operatorname{tg} x$	x	$\ln(1+x)$	x
$\operatorname{arcsen} x$	x	$e^x - 1$	x
$\operatorname{arctg} x$	x	$a^x - 1$ ($a > 0, a \neq 1$)	$x \ln a$
$\operatorname{senh} x$	x	$(1+x)^\alpha - 1$ ($\alpha \neq 0$)	αx

En lugar de x puede ir cualquier función f que tienda a 0, en el punto del límite que sea:

$$\operatorname{sen} 3x^2 \sim 3x^2 \quad (x \rightarrow 0), \quad \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \sim \frac{1}{n} \quad (n \rightarrow \infty), \quad e^{x-1} - 1 \sim x - 1 \quad (x \rightarrow 1).$$

Límites notables.

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \rightarrow e, \quad \text{si } f \rightarrow 1, g \rightarrow \infty: \quad \lim f^g = e^{\lim g(f-1)}.$$

Cómo se usa

Equivalentes: solo en productos y cocientes. Un factor del numerador o del denominador se cambia por su equivalente: $\frac{\operatorname{sen} 3x}{x} \rightarrow \frac{3x}{x} = 3$.

En sumas y restas, nunca. Si los términos principales se cancelan, el equivalente los borra a los dos y se pierde lo que queda. Ahí se usa **Taylor**, cortando en el primer orden que no se cancela:

$$\frac{x - \operatorname{sen} x}{x^3} = \frac{x - \left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right)}{x^3} = \frac{\frac{x^3}{6} + o(x^3)}{x^3} \rightarrow \frac{1}{6}.$$

Qué orden: el del denominador (aquí x^3). Si sobra, no pasa nada; si falta, queda un $o(\cdot)$ que no deja calcular el límite.

Ejemplos de uso

1. Solo equivalentes (todo son factores):

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} 3x \ln(1+2x)}{x(e^x - 1)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x \cdot 2x}{x \cdot x} = 6.$$

2. Tipo 1^∞ . $\cos x \rightarrow 1$ y $1/x^2 \rightarrow \infty$:

$$\lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{1/x^2} = e^{\lim \frac{\cos x - 1}{x^2}} = e^{\lim \frac{-x^2/2}{x^2}} = e^{-1/2}.$$

3. Equivalentes en una resta: mal. Con $\operatorname{tg} x \sim x$ y $\operatorname{sen} x \sim x$:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - \operatorname{sen} x}{x^3} \stackrel{\times}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - x}{x^3} = 0 \quad (\text{falso}).$$

Con Taylor hasta x^3 :

$$\frac{(x + \frac{x^3}{3}) - (x - \frac{x^3}{6}) + o(x^3)}{x^3} = \frac{\frac{x^3}{2} + o(x^3)}{x^3} \rightarrow \frac{1}{2}.$$

4. Elegir el orden. El denominador es x^2 , así que e^x hasta x^2 :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 - x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2)) - 1 - x}{x^2} = \frac{1}{2}.$$

5. Composición con equivalentes. $\cos x - 1 \rightarrow 0$ hace de f en $\ln(1 + f) \sim f$:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\cos x)}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + (\cos x - 1))}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-x^2/2}{x^2} = -\frac{1}{2}.$$

6. Composición con Taylor. En $e^u = 1 + u + \frac{u^2}{2} + o(u^2)$ se pone $u = \operatorname{sen} x = x + o(x^2)$:

$$e^{\operatorname{sen} x} = 1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2) \implies \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\operatorname{sen} x} - 1 - x}{x^2} = \frac{1}{2}.$$

Errores típicos. Usar equivalentes en sumas o restas: en el ejemplo 3 da 0 y es $\frac{1}{2}$. Olvidar que la tabla vale cuando lo de dentro tiende a 0: $\operatorname{sen} x \sim x$ es falso si $x \rightarrow \infty$ o $x \rightarrow \pi$. Quedarse corto de orden: si el denominador es x^3 y se corta en x , todo lo que importa está en el $o(x)$. Tratar 1^∞ como 1: $(1 + \frac{1}{n})^n \rightarrow e$, no 1.